LA NOTION DE FONCTION

Fernand Lemay

I - ÉVOLUTION DE LA NOTION DE FONCTION.

Le terme fonction paraît avoir été utilisé la première fois en mathématiques par Leibniz vers 1694 pour désigner certaines longueurs variables associées de façon bien définie aux points d'une courbe. L'évolution de ce concept allait s'accomplir en 3 étapes principales et durer quelque 250 années.

Pendant au moins tout le XVIII^e siècle la notion de fonction ne se séparera pas de l'idée d'expression analytique. Au cours de 1718 Jacques Bernouilli (à qui on doit la distinction entre fonction algébrique et fonction transcendante) désigne par ce terme "toute quantité composée d'une manière quelconque d'une grandeur variable et de constantes". Euler (qui introduit les distinctions entre fonctions implicite et explicite d'une part, uniforme et multiforme d'autre part) considère qu'une fonction est définie par une égalité (ou par plusieurs égalités conjointes) où apparaissent uniquement les signes et notations de l'algèbre, de la trigonométrie, du logarithme, ... et enfin le passage à la limite des suites indéfinies. En 1797, dans sa "Théorie des fonctions analytiques", Lagrange définit une fonction comme étant une propriété d'une série de puissances de la variable indépendante.

Les travaux de physique mathématique de d'Alembert et Fourier llaient provoquer une modification fondamentale du concept de fonction. n effet, en 1829 Dirichlet dans un travail sur les développements en séie (Uber die Darstellung ganz willkürlicher Funktionem durch Sinusnd-Cosinusreiben) donne pour la première fois une définition de fonction issociée complètement de l'idée d'expression analytique et définit avec récision le graphe d'une fonction: il ne sera plus nécessaire que ce soit a même loi qui exprime la dépendance entre y et x pour tout l'intervalle ans lequel est définie la fonction, bien plus il ne sera même plus nécesaire que cette dépendance s'exprime par des opérations mathématiques. t Riemann reprit cette définition à son compte: il suffit pour que la onction soit regardée comme valablement définie, de postuler l'existene de la loi fixant pour chaque valeur de la variable indépendante la vaeur de la fonction, que cette loi puisse ou non se traduire dans le symolisme usuel de l'Algèbre ou de l'Analyse.

Même si cette définition eut de sérieux adversaires pour lui reproher de tomber dans l'excessive généralité, elle fut généralement admie et les textes classiques contiennent des locutions du genre suivant:

> "y est fonction de x lorsque x étant donné, y est bien déterminé" (Appell).

"Une fonction f de trois variables x, y, z, par exemple, sera définie par cette seule condition qu'à tout système de valeurs des 3 variables correspond une valeur bien déterminée de

f(x, y, z)" (Borel).

Pour Denjoy, la fonction c'est une variable dont la valeur est commandée par celle d'une autre variable ou un système de valeurs d'autres variables elles-mêmes dites indépendantes.

"Deux variables x et y sont fonctions l'une de l'autre dans le sens le plus général, s'il existe une dépendance quelconque entre les valeurs qu'on peut leur attribuer" (La Vallée Poussin).

Jusque là se trouve donc plus ou moins intimement liées à l'idée de fonction celles de variable, de dépendance, de correspondance, de relation, de grandeur variable, de loi, de valeur bien déterminée, ... La mathématique actuelle s'accommode fort mal de ces termes plus ou moins bien définis et de ces êtres qui varient, évoluent, dépendent ou s'influencent mutuellement. Une reformulation plus abstraite semblait nécessaire pour clarifier la notion de fonction; elle paraît avoir été faite par Frege et fut reprise par Hausdorff dans son célèbre Mengenlehre (1914).

II - L'ABSTRACTION DE LA NOTION DE FONCTION.

Que les notions fondamentales inhérentes à la mathématique évoluent sans cesse vers l'abstraction, c'est un phénomène qui n'est pas nouveau (et qui n'est pas d'ailleurs propre à la science mathématique).
Qu'on songe à ce qu'est une droite pour Euclide et à ce qu'elle est pour Hilbert; à ce qu'est le nombre réel pour Pythagore et à ce qu'il est pour Weierstrass, Cantor et Dedekind; à ce qu'est une limite pour Archimède et à ce que c'est pour Cauchy et Cartan. Mais pourquoi cette abstraction toujours plus grande?

En premier lieu parce que telle est l'exigence de la science mathématique contemporaine: la notion traditionnelle de fonction, relativement grossière, ne permettrait même pas de poser avec acuité, clarté et rigueur, nombre de problèmes dont s'occupe la mathématique pure et appliquée de l'heure.

En second lieu c'est peut-être parce que dans l'ordre intellectuel les êtres que l'on côtoient sans cesse et qui de ce fait sont les plus fondamentaux, sont peut-être aussi ceux que la conscience perçoit le plus difficilement et dont les propriétés passent le plus inaperçues: par exemple la notion d'ensemble est l'une des plus fondamentale mais l'élaboration de la Théorie des Ensembles n'a été commencée qu'au siècle dernier.

Enfin, en troisième lieu, la notion de fonction est si fondamentale et ses applications si variées qu'elle en est venue à désigner une foule de choses très distinctes et parfois sans rapport évident avec les mathématiques. Seule une définition comportant une certaine abstraction peut permettre de donner quelque sens à des questions du genre suivant:

> l'accélération d'une particule est-elle fonction de la vitesse, de la distance, du temps; si oui est-ce la même fonction?
> l'heure à ma montre est-elle fonction de l'heure à votre montre?
> les cotes de la bourse sont-elles fonction de l'heure?
> le poids d'une personne est-il fonction de sa grandeur?

Ainsi donc la notion de fonction doit être abstraite, mais quel sera le sens de cette abstraction? Les descriptions habituelles de la notion de fonction, en plus de s'exprimer en termes vagues (variation, dépendance,....) font souvent appel à une représentation intuitive, concrète, particulière; or la mathématique ne s'occupe directement ni du concret ni du particulier.

Dire qu'une notion doit être abstraite ne signifie pas qu'il faille exclure à son sujet toute interprétation intuitive car au contraire il est certain que de telles interprétations sont utiles et souvent même indispensables. Ce que l'abstraction d'une notion signifie c'est que celle-ci ne doit pas recevoir de réalisation concrète spéciale à l'exclusion des autres réalisations possibles. Ainsi comprise l'abstraction n'est pas un obstacle mais un stimulant pour l'intelligence et l'imagination qui recouvrent leur pleine liberté. Or peut-être est-ce la marque du pédagogue de savoir inculquer une discipline de l'esprit sans restreindre en même temps la liberté intellectuelle de l'élève.

Le problème qui nous occupe n'est donc pas d'établir la diversité des applications de la notion de fonction mais de reconnaître parmi les éléments qui concourent à sa formation ceux qui paraissent essentiels et ceux qui sont arbitraires, et de réunir les premiers en une définition formelle de la notion de fonction.

III - DÉFINITION DE LA NOTION DE FONCTION.

La définition mathématique idéale devrait s'exprimer à partir d'éléments déjà explicitement donnés ou construits; une telle définition est possible mais s'inscrit dans les cadres d'un langage formalisé; elle n'est en tout cas nécessaire que pour aborder certaines questions de principes que nous n'examinerons pas. Aussi donnerons-nous une définition qui emprunte des termes non définis qu'on serait en droit de nous demander d'expliquer mais que nous considérons comme suffisamment familliers pour que les différences d'interprétation auxquelles ils peuvent donner lieu ne puissent engendrer de divergences profondes dans le développement prochain de la théorie et des applications de la notion de fonction.

Que retiendrons-nous des idées de variable, de dépendance, d'équation, de graphe?

Presque toutes les définitions de fonctions que nous avons rencontrées étaient donnés en termes de variables ("la variable y est fonction de la variable x lorsque x étant donné, y est bien déterminé", Appell); et l'habitude demeure de donner un rôle prépondérant aux variables. Ne dit-on pas couramment "y est fonction de x"; en physique n'écrit-on pas

$$s = s(v) = s(t) = 16\,t^2 = \frac{1}{64}\,v^2$$

sans se demander s'il s'agit là de fonction et s'il y en a une ou plusieurs? En calcul différentiel, on écrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

et on considère sans précaution y à la fois comme fonction de t et comme fonction de x sans savoir si une fonction de x peut être égale à une fonction de t.
La notion de fonction qui suivra s'exprimera sans qu'il soit nécessaire de faire appel aux variables (ni dépendantes, ni indépendantes).

De la notion de dépendance ou de correspondance entre deux éléments nous ne retiendrons que le fait que si on part d'un premier élément on est conduit à un second, c'est-à-dire que nous ne retiendrons que l'ordre des deux éléments.

A l'idée d'équation ou d'expression analytique, nous substituerons celle de graphe, car deux équations distinctes peuvent représenter la même courbe. (Exemple:

$$x^2 - \frac{1y}{16} = 0 \quad \text{et } 16x^4 - y\,k^2 - y + 16\,x^2y^2 = 0) .$$

Enfin le contenu de l'idée de graphe, est essentiellement celui d'une table à deux entrées; c'est-à-dire n'est autre qu'un ensemble de couples (ordonnés).

DÉFINITION

Soient deux ensembles quelconques E et F; une fonction de E dans F est la donnée, outre E et F, d'un ensemble $\mathcal{G}$ de couples (ordonnés) dont le premier élément appartient à E et le second à F, cet ensemble vérifiant la propriété suivante:
pour chaque élément de E il existe un élément de F et un seul tel que le couple formé de ces deux éléments (dans l'ordre) appartienne à $\mathcal{G}$.

Une fonction de E dans F est donc la donnée d'un triplet $(E, F, \mathcal{G})$

formé de trois ensembles satisfaisants à la condition précédente.

IV - TERMINOLOGIE ET SYMBOLES

Les ensembles E et F sont formés d'éléments quelconques (on exige seulement d'être en mesure de déterminer sans ambiguité si tel élément appartient ou non à l'ensemble). En général cependant ces ensembles sont formés de nombres, polynômes, fonctions, figures géométriques, vecteurs ... .

L'ensemble E aurait pu être nommé "premier ensemble", déjà on lui donne un nom plus suggestif c'est *l'ensemble de définition* ou *l'ensemble de départ* de la fonction.

L'ensemble F , qui peut coïncider avec le précédent, s'appelle ensemble d'arrivée de la fonction (il contient ce qui s'appellera plus loin *l'ensemble des valeurs* mais en est généralement distinct).

Une fonction (E, F, $\mathcal{G}$) est généralement désignée par une lettre (f, g, h, , , ...) ou par une combinaison de lettres et d'autres signes (f g, f(x) dx, f', D f, ...); par exemple nous écrirons

$$f = (E, F, \mathcal{G}) .$$

L'ensemble de couples, $\mathcal{G}$, est appelé *graphe* ou *ensemble représentatif* de la fonction f .

La relation "$(x, y) \in \mathcal{G}$" pourra se lire:
"*y correspond à x par la fonction f*"

Pour tout $x \in E$ il n'existe qu'un seul $y \in F$ tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$, cet élément unique de F qui correspond à x par la fonction f s'appelle aussi *valeur de f pour l'élément* $x \in E$ et sera désigné, suivant la notation d'Euler, par f(x) .
On écrira aussi $f: x \to y$ pour signifier $y = f(x)$ ou $(x, y) \in \mathcal{G}$.

On a donc pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$

$$y = f(x) \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow f: x \to y .$$

Avec ces notations, le graphe de f peut s'écrire (1)

$$\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

L'ensemble

$$\{f(x) \mid x \in E\}$$

qu'on note aussi f(E), s'appelle *l'ensemble des valeurs de la fonction f.*

---

(1) $\{\ldots \mid \ldots\}$ se lit "ensemble des ... tels que ..." .

Si cet ensemble des valeurs coïncide avec l'ensemble d'arrivée, f(E) = F, f sera dite fonction de E sur F .

Enfin la fonction f est dite biunivoque si

$$f(x') = f(x'') \Longleftrightarrow x' = x''$$

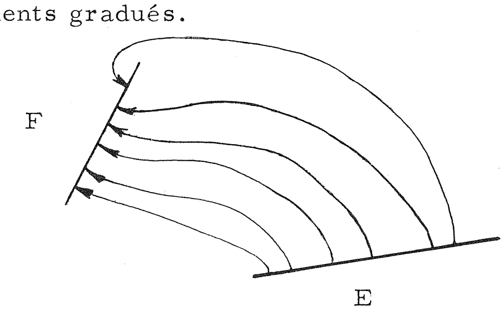
pour tout $x' \in E$ et tout $x'' \in E$.

V - MANIÈRES DE DÉTERMINER UNE FONCTION

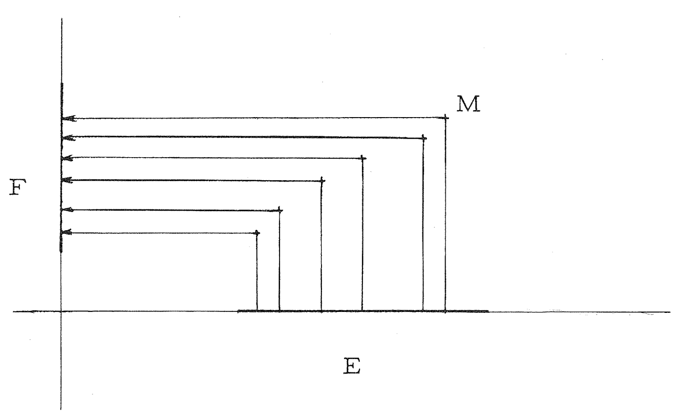
1) Par le graphe. -

Cela revient à donner directement l'ensemble des couples. Même si la fonction est le plus souvent définie par une table idéale comportant une infinité d'entrées, ce moyen s'avère suffisant dans la pratique pour une foule d'applications.

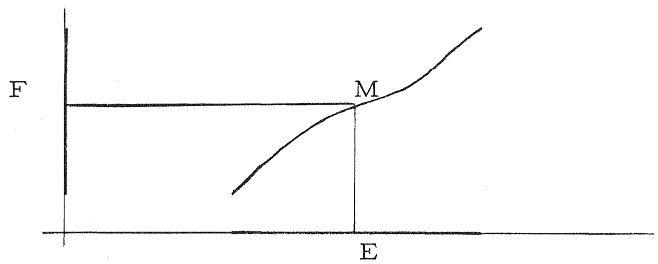
A cette méthode se rattache aussi celle de la représentation graphique des fonctions. Supposons par exemple les ensembles E et F identifiés à 2 segments gradués.



Il s'agit essentiellement de "nommer" tous les éléments de E et d'indiquer leur correspondant dans F . Bien sûr on a vite su inventer selon les besoins des représentations schématiques variées: Par exemple E et F seront des segments perpendiculaires



et on ne retiendra plus que l'ensemble des points M (cf. figures),



permettant ainsi d'identifier d'une certaine manière courbe (dans un sens très large) et fonction de E dans F (de la même manière qu'on identifie nombres réels et points d'une droite).

Bien d'autres représentations sont utilisées; entre autres les règles à calcul, les abaques et celles qu'on associe aux divers systèmes de coordonnées.

2) Par un terme.

Intuitivement les termes mathématiques sont des assemblages de signes qui représentent des objets. Soit x une lettre qui désigne un élément indéterminé d'un ensemble E, et soit $T\{x\}$ un terme dans lequel intervient x, alors $T\{x\}$ désigne un objet dont la construction dépend de x: "$x + 5$", "$e^x\,dx$", "les racines de x^2+1" sont des termes du genre.

Soit F un ensemble renfermant tous les $T\{x\}$ pour $x \in E$, et soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des couples de la forme $(x, T\{x\})$ pour $x \in E$. Alors

$$f = (E, F, \mathcal{G})$$

est appelée la fonction de E dans F définie par le terme $T\{x\}$ ou simplement, lorsqu'il n'en résulte pas d'ambiguité: la fonction $T\{x\}$ (par abus de langage). Symboliquement on pourra désigner cette fonction comme suit:

$$x \to T\{x\}, \quad x \in E .$$

Exemple. Si E désigne l'intervalle de nombre réels $[0,1]$ et F l'ensemble de tous les réels, alors la fonction de E dans F définie par le terme $x^3 + 5$ sera notée

$$x \to x^3 + 5, \quad x \in [0,1] .$$

3) Par une relation fonctionnelle.

Intuitivement les relations mathématiques sont des assemblages de signes représentant des assertions que l'on peut faire sur des objets. Soient x et y des lettres désignant des éléments indéterminés d'ensembles E et F et soit $R\{x, y\}$ une relation dans laquelle interviennent x et y; alors $R\{x, y\}$ représente une assertion relative aux objets x et y.

Exemple: Si x et y désignent des nombres réels, "$\sin (2x+1) = 3y$" et "$x^2 + y^2 \geqslant 0$" sont des relations.

Une relation $R\{x, y\}$ est dite <u>fonctionnelle en y</u> si pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in F$ et un <u>seul tel que</u> $R\{x, y\}$ soit vérifiée. Ainsi, x et y désignant des nombres réels quelconques, la relation "$\sin (2x+1) = 3y$" est fonctionnelle en y mais non la relation

$$"x^2 + y^2 \geqslant 0" .$$

Si $\mathcal{G}$ désigne l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $R\{x, y\}$:

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \mid R\{x, y\}\} ,$$

alors

$$f = (E, F, \mathcal{G})$$

est dite <u>fonction de E dans F définie par la relation fonctionnelle</u> $R\{x, y\}$.

Ce qu'on a coutume d'appeler "fonction implicite" rentre dans cette méthode, quoique qu'il faille remarquer qu'il n'y a aucune place ici pour cette locution; on parlerait plus naturellement de relation implicite (en supposant qu'un tel langage soit vraiment nécessaire).

Est-il nécessaire en terminant de faire remarquer que cette note a été rédigée sans préoccupation pédagogique; il s'agissait de constituer un terrain d'entente sur lequel étudiants, pédagogues, chercheurs viendront coordonner leurs efforts. [1]

Université Laval,
Québec.

[1] Texte d'une conférence prononcée lors du congrès annuel de l'Association Mathématique du Québec tenu à Québec le 14 mai 1960.