MATHEMATIQUES FINIES[1]

François Munier

Il existe actuellement en mathématiques une tendance à attacher une importance de plus en plus grande à un certain nombre de questions (partitions, analyse combinatoire, différences finies, ...) que l'avènement du calcul infinitésimal et les succès éclatants de l'analyse avaient temporairement reléguées au second plan. Le développement de nouvelles disciplines (Théorie des jeux, programmation linéaire, etc...) et l'emploi de nouvelles méthodes pour la solution approchée des problèmes d'analyse remettent en effet ces sujets à l'ordre du jour.

Ces questions ont en commun le caractère d'être finies; c'est-à-dire de ne pas faire appel aux notions de continuité, d'ensembles infinis, de passage à la limite (qui sont précisément les notions de base du calcul infinitésimal) aussi peut-on les désigner globalement sous le terme de "Mathématiques finies".

La tendance actuelle s'est naturellement reflétée dans les livres publiés ces dernières années. Des spécialistes ont écrit des traités avancés sur certains aspects particuliers de mathématiques finies. Beaucoup d'auteurs de manuels élémentaires ont introduit dans leurs ouvrages un ou plusieurs chapitres traitant de mathématiques finies, enfin l'on vient même de présenter un livre d'un caractère élémentaire consacré entièrement à ce sujet.

C'est l'INTRODUCTION TO FINITE MATHEMATICS par Kemeny, Snell et Thompson, édité par Prentice Hall Inc. 1957, 367 pages.

---

1) Article compte-rendu du livre Introduction to Finite Mathematics, par G. Kemeny, J. L. Snell et G. L. Thompson (Prentice-Hall 1957).

Les auteurs de cet excellent traité se sont proposé d'écrire un manuel au niveau de la première année d'enseignement universitaire, qui puisse servir à la fois comme introduction aux concepts de base des mathématiques modernes (logique, théorie des ensembles ...) pour l'étudiant de sciences pures, et aussi comme traité de mathématiques appliquées exposant la théorie des probabilités, la programmation linéaire, la théorie des jeux essentiels pour les étudiants en sciences économiques et sociologiques.

L'espace dont nous disposons est trop restreint pour nous permettre à la fois, comme nous le voudrions, d'exposer au lecteur les principaux aspects des mathématiques finies et de faire une revue détaillée de l'ouvrage. Aussi après une analyse très sommaire de l'ensemble du traité, nous bornerons-nous à examiner à fond le seul chapitre III et à cette occasion à développer comme exemple une application récente des mathématiques finies.

Les deux premiers chapitres contiennent une introduction à la logique symbolique et à la théorie des ensembles. Les ouvrages publiés ces dernières années aux Etats-Unis nous ont habitués à une telle introduction. Toutefois, par opposition à ce qui se fait généralement, les auteurs se sont limités à l'essentiel et ont su résister à la tentation de faire de ces chapitres une longue liste de définitions et de théorèmes qui n'auraient pu être utilisés par la suite. S'étant restreints à exposer les concepts de base, ils se sont par contre efforcés de les faire assimiler à l'élève grâce à leur utilisation presque continuelle dans le reste de l'ouvrage.

Les notions développées dans les premiers chapitres permettent de définir correctement la probabilité d'un évènement comme étant une mesure; l'on peut alors, en utilisant la représentation de la mesure par une surface, démontrer un cas simple du théorème de Bayes.

Quelques-uns des autres sujets traités dans le chapitre IV sur les probabilités sont: les processus stochastiques finis, les chaînes de Markov et quelques problèmes de décision. Naturellement les questions élémentaires de probabilités exposées dans les manuels d'algèbre complémentaire sont amplement traitées.

Le chapitre V sur les vecteurs et les matrices couvre un sujet bien connu. Toutefois, le point de vue adopté est quelque peu différent de celui auquel nous sommes habitués. Les vecteurs y sont en effet introduits directement comme vecteur rangée et vecteur colonne, ce qui facilite l'étude des opérations entre vecteurs et matrice. Les auteurs attachent une plus grande importance à l'aspect transformation qu'à l'aspect géométrique des vecteurs.

Le chapitre VI est une introduction à deux nouvelles branches des mathématiques dont le développement à été très rapide ces dernières années: la théorie des jeux et la programmation linéaire. Grâce à la préparation méthodique préalable des chapitres précédents, les auteurs peuvent maintenant aborder des problèmes assez avancés et je suis sûr que les lecteurs trouveront ce chapitre particulièrement profitable, la matière leur en étant probablement nouvelle et se trouvant riche d'applications pratiques.

Le dernier chapitre contient cinq applications à la sociologie, à la génétique, à la psychologie, à l'anthropologie et à l'économique. Ces questions, bien qu'assez spécialisées, ne laissent pas de présenter un grand intérêt; le lecteur en suivra d'ailleurs sans peine le développement.

Sous le titre de partitions et énumérations, le chapitre III contient ce que l'on voit habituellement sous le nom d'analyse combinatoire dans les traités d'algèbre.

La définition de partition d'un ensemble avec de nombreux exemples et applications est donnée dès lé début puis les permutations sont introduites.

L'énumération des partitions ordonnées d'un ensemble de n éléments permet d'introduire les permutations avec répétitions et comme cas particulier les combinaisons: C_n^r est défini comme étant le nombre de partitions différentes d'un ensemble ordonné de n éléments en deux sous-ensembles contenant respectivement r et n-r éléments.

Les propriétés de C_n^r sont ensuite obtenues et illustrées à l'aide du triangle de Pascal; une modification de ce dernier sert pareillement à introduire les combinaisons avec répétitions. Celles-ci sont alors utilisées pour obtenir les formules du développement d'un binôme et un polynome élevé à la nième puissance.

Un exemple caractéristique des nouvelles applications traitées dans ce chapitre est la détermination de la puissance de vote d'un membre d'une assemblée.

Soit une assemblée composée de membres ayant chacun droit à un certain nombre de votes (pas nécessairement le même). L'influence d'un membre dans un scrutin, ce que nous appellerons sa puissance de vote, n'est pas strictement proportionnelle au nombre de votes qu'il détient.

Considérons en effet un cas très simple. Si les 1000 parts émises par une compagnie ont été accaparées par 2 actionnaires l'un possédant 501 parts, l'autre 499, dans une assemblée d'actionnaires le premier sera tout puissant le second n'aura aucun pouvoir bien que le nombre de votes des deux soit presque égal.

Il faut donc trouver un autre critère que le simple nombre de votes pour mesurer d'une manière satisfaisante la puissance de vote. Nous nous servirons du critère suggéré par Shapley et Shubik dans l'article "A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Commitee System", publié dans "The American Political Science Review" en 1954.

Considérons tous les membres x_i d'une assemblée comme votant à tour de rôle en faveur d'une motion; les premiers votes seront en général insuffisants pour faire passer la motion, puis le vote d'une seule personne emportera la motion (vote crucial) et finalement les votes subséquents seront superflus.

Nous désignerons sous le nom d'alignements $(x_1, x_2, \ldots \underline{x_r}, \ldots, x_n)$ l'ensemble des membres de l'assemblée rangés suivant leur ordre de vote, le membre dont le vote est crucial est souligné.

Il est assez naturel de mesurer la puissance de vote en terme du nombre de fois qu'un vote est crucial. Ainsi l'on définira la puissance de vote P d'un membre comme étant le quotien du nombre d'alignements dans lesquels son vote est crucial sur le nombre d'alignements possibles.

Illustrons par quelques exemples:

Une compagnie a émis 100,000 actions, celles-ci sont détenues par trois actionnaires x, y, z, qui en possèdent respectivement 50,000, 49,999, et 1. Trouver la puissance de vote de chaque actionnaire.

On peut facilement énumérer tous les alignements possibles, il y en a $3! = 6$ qui sont:

$(x, \underline{y}, z)$	$(x, \underline{z}, y)$	$(y, \underline{x}, z)$
$(y, z, \underline{x})$	$(z, \underline{x}, y)$	$(z, y, \underline{x})$

On obtient immédiatement la puissance de vote de x (4/6) et celle de y et z (1/6).

Seuls des exemples très simples comme le précédent peuvent se résoudre par simple énumération des alignements possibles. En général les alignements devront être comptés en se servant des procédés de l'analyse combinatoire.

Un autre exemple:

Le conseil de sécurité des Nations Unies est composé de 11 membres, cinq permanents (les 5 grands) et six temporaires (six nations secondaires). Pour qu'une mesure soit adoptée il faut que 7 membres au moins dont tous les membres permanents aient voté en sa faveur. Trouver la puissance de vote d'un membre permanent et d'un membre temporaire.

Il ne saurait être question d'énumérer les $11!$ alignements possibles.

Nous calculerons la puissance de vote d'un membre temporaire en remarquant que pour que son vote soit crucial il faut qu'il soit en 7e position. L'alignement est donc divisé en deux sous-alignements le premier devra contenir les cinq membres permanents et un membre temporaire, le second quatre membres temporaires.

Les membres du 1er sous-alignement peuvent être choisis de 5 façons différentes (le membre temporaire peut être choisi parmi 5 membres) et on peut les aligner de $6!$ manières. Les membres du 2ème sous-alignement sont les membres restants et on peut les aligner de $4!$ manières.

Le nombre d'alignements dans lesquels le vote du membre temporaire est crucial est donc $5 \times 6! \times 4!$ et sa puissance de vote est

$$P = \frac{5 \times 6! \times 4!}{11} = \frac{1}{462}$$

On trouve par un argument similaire que la puissance de vote d'un membre permanent est 76/385. On aurait pu l'obtenir aussi plus rapidement en remarquant que la somme des puissances de tous les membres est l'unité.

Une revue de cet ouvrage serait incomplète sans une mention spéciale des exemples traités et des problèmes suggérés. Les premiers sont suffisamment nombreux et assez détaillées pour que le livre puisse être utilisé sans aide par un élève.

Quelques échantillons permettront de se rendre compte de l'intérêt des problèmes:

- Un aviculteur élève des poulets, des canards et des oies mais sa ferme ne lui permet d'avoir à la fois que 500 volailles, dont au plus 300 canards.

Si le coût de l'élevage d'un poulet est \$1.50, celui d'un canard \$1.00 et celui d'une dinde \$4.00 et que leur prix de vente respectif soit de \$3.00, \$2.00. N\$ (N = \$5.00, \$5.50, \$6.00), trouver pour les différentes valeurs de N quel genre de volaille sera le plus profitable à élever.

– On désire contrôler l'éclairage d'une vaste salle à l'aide de 4 interrupteurs placés sur les 4 murs de manière que l'on puisse allumer ou éteindre en ouvrant ou en fermant n'importe lequel des interrupteurs.

Montrer qu'on peut remplir ces conditions en construisant un circuit électrique qui soit fermé si un nombre pair d'interrupteurs est fermé et ouvert si un nombre impair d'interrupteurs est fermé. Construire ce circuit.

– Le pays X est privilégié sous bien des rapports mais pas sous celui de la température. Il n'y fait jamais beau deux jours de suite. S'il fait beau une journée, le lendemain il pleuvra ou neigera avec une égale probabilité. S'il pleut (ou neige), une fois sur deux le lendemain le temps sera identique. Et finalement s'il pleut (ou neige) une journée et que le lendemain le temps change, il ne changera pour le beau qu'une fois sur deux. Trouvez le pourcentage de jours de pluie, de neige, de beau temps sur une longue période. (Rép. 40%, 40%, 20%.)

L'Introduction to Finite Mathematics étant destiné à la première année du B.A. américain se trouve par le fait même au niveau des classes de philosophie de nos cours classiques, aussi les professeurs de ces classes le liront-ils avec profit. En plus d'un aperçu sur de récents développements des mathématiques, ils y trouveront pour leurs élèves des problèmes intéressants.

Les concepts de base des mathématiques finies étant beaucoup plus faciles à saisir que ceux des mathématiques infinitésimales, les professeurs pourraient même suggérer la lecture de cet ouvrage à ceux de leurs élèves qui sont plus particulièrement attirés par les mathématiques.

Ecole Polytechnique et Université de Montréal,
Montréal.