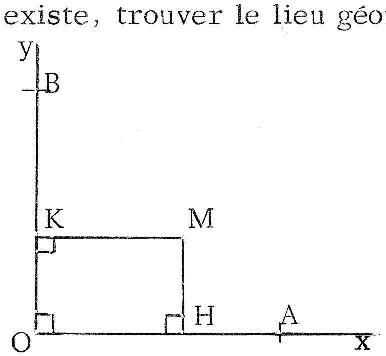
SUR LES LIEUX GEOMETRIQUES

Jean Legoupil

Les problèmes de lieux géométriques semblent souvent difficiles aux élèves et il est assez rare de voir des débutants donner des solutions complètes et rigoureuses. Pourtant ils sont instructifs et ils peuvent être utiles pour le développement de l'esprit logique.

Nous étudierons un exemple très simple et nous montrerons sur cet exemple la variété des solutions possibles.

Soient deux demi-droites perpendiculaires Ox, Oy. Existe-t-il des points M situés dans l'angle xOy, dont la somme des distances MH, MK aux deux demi-droites est égale à une valeur donnée a ? S'il en existe, trouver le lieu géométrique de ces points.



On voit d'abord deux points particuliers solution: A sur Ox à la distance a de O, B sur Oy à la distance a de O.

On remarque aussi qu'il existe un point du lieu et un seul sur toute parallèle (D) à Oy coupant le segment OA (en H). En effet, c'est le point M sur (D) tel que $HM = a - OH$ puisque $OH = MK$ (côtés opposés d'un rectangle). C'est le seul car si $HM \neq a - OH$, on a $HM + MK \neq a$.

Lorsque cette parallèle varie, le point M varie en décrivant le lieu géométrique cherché.

Nous pourrons donc, si on le désire, commencer en employant l'expression courante "Soit M un point du lieu", mais ceci n'est légitime que parce que l'on a prouvé précédemment l'existence de points du lieu.

Résolvons d'abord le problème de la façon la plus classique, puis nous donnerons une idée de la variété des raisonnements qu'il est possible d'employer.

Pour prouver que AB est le lieu géométrique, nous démontrerons (a) que tout point du lieu est sur AB, (b) que tout point de AB est point du lieu.

(a) Soit M un point de lieu.

<u>Hypothèses</u>: angles droits en O, H, K

$MH + MK = a$

$OA = OB = a$

Il en résulte que OHMK est un rectangle d'où $MK = OH$. On a donc $MH + OH = a$.

En comparant avec $OH + HA = a$, on en déduit $HA = MH$, d'où l'angle $HAM = 45^o$.

Le point M est donc situé sur le segment AB (conclusion).

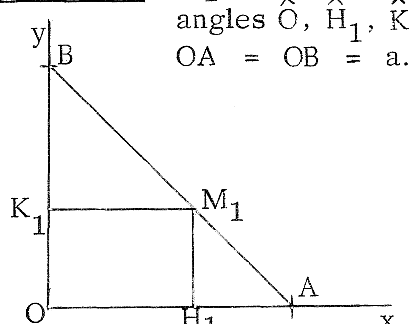
On peut donc dire que tout point du lieu est nécessairement situé sur le segment AB (ou si l'on veut qu'il n'y a pas de point du lieu hors du segment AB). On ne sait pas encore si tous les points de AB sont points du lieu. C'est ce que nous allons voir.

(b) Un point M quelconque du segment AB est point du lieu.

<u>Hypothèses</u>: M_1 situé sur AB

angles $\hat{O}$, $\hat{H}_1$, $\hat{K}_1$ droits

$OA = OB = a$.



$OH_1M_1K_1$ est un rectangle, donc $OH_1 = M_1K_1$. M_1H_1A est un triangle rectangle isocèle, donc $H_1A = M_1H_1$. De l'égalité $OH_1 + H_1A = a$, on en déduit $M_1H_1 + M_1K_1 = a$ (conclusion).

Bien entendu pour démontrer cette partie (b), il est possible d'agir autrement.

Nous avons vu au début qu'il existe un point du lieu et un seul sur toute parallèle à Oy coupant OA, donc sur H_1M_1. Ce point du lieu est aussi d'après la première partie nécessairement situé sur AB, donc c'est M_1.

Dans ce qui précède nous avons démontré d'abord (a) tout point du lieu est sur AB, puis (b) tout point de AB est point du lieu.

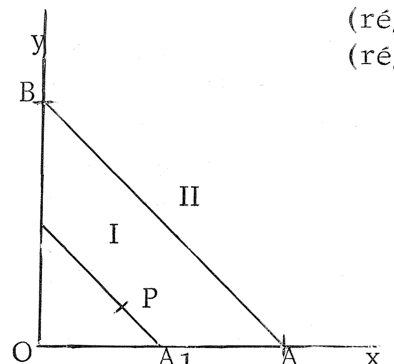
Bien entendu, on aurait pu aussi bien faire les démonstrations dans l'ordre inverse: (1) tout point de AB est point du lieu, (2) tout point du lieu est situé sur AB.

Si on démontre d'abord (1), tout point de AB est point du lieu, c'est-à-dire MH + MK = OA, donnons une manière bien simple et élégante de prouver la deuxième partie.

Le segment AB partage la région xOy en deux parties:

Le triangle AOB (région I)

La région xABy (région II)



Soit P un point de la région I. La parallèle à AB menée par P coupe le segment OA en A_1. D'après la démonstration de (1), la somme des distances de P à Ox, Oy est égale à OA_1, donc plus petite que OA = a.

On verrait de même que le somme des distances de tout point de la région II aux demi-droites Ox, Oy est plus grande que OA = a.

On s'oriente donc vers l'étude des trois lieux géométriques:

(A) Lieu des points dont la somme des distances à Ox, Oy est plus petite que a. (région I)

(B) Lieu des points dont la somme des distances à Ox, Oy est égale à a. (segment AB)

(C) Lieu des points dont la somme des distances à Ox, Oy est plus grande que a. (région II).

On a élargi le problème et on a démontré le (1) de l'étude de ces trois lieux, mais nous supprimons en même temps les complications des réciproques.

En effet, il n'y a pas d'autres points du lieu (B) que les points de AB, car tout autre point est dans l'une des régions I ou II et la somme de ses distances à Ox, Oy est inférieure ou supérieure à a, donc jamais égale à a; et de même si l'on étudiait les lieux (A) et (C). Le problème est donc entièrement résolu.

Revenons maintenant aux démonstrations (a) et (b) du début. Nous remarquons que certaines hypothèses sont communes aux deux cas: $OA = OB = a$, les angles $\hat{O}$, $\hat{H}$, $\hat{K}$ droits. On en déduit: OHMK est un rectangle, $MK = OH$.

Cette démonstration est répétée dans les parties (a) et (b). Evitons cette répétition inutile et présentons les choses de la façon suivante:

Soient Ox, Oy perpendiculaires et un point M, H et K ses projections sur Ox, Oy, A et B les points de Ox, Oy tels que $OA = OB = a$.

Des angles droits $\hat{O}$, $\hat{H}$, $\hat{K}$ on déduit que $MK = OH$.

Nous montrons ensuite que le lieu géométrique des points tels que $MH + MK = a$ est le même que le lieu géométrique des points tels que $MH + OH = a$.

Car si $MH + OH = a$, il en résulte que $MH + MK = a$ et réciproquement.

Puis le lieu géométrique des points tels que $MH + OH = a$ est le même que le lieu des points M tels que $MH = AH$, car si $MH + OH = a$, il en résulte $MH = AH$ et réciproquement.

Enfin le lieu géométrique des points tels que $MH = AH$ est le même que le lieu des points M tels que $\widehat{OAM} = 45^o$, c'est-à-dire AB. Car si $MH = AH$, $\widehat{OAM} = 45^o$, M est sur AB et réciproquement. Ce qui résoud le problème.

(Notons en passant que chacun des énoncés précédents peut se mettre sous forme de condition nécessaire et suffisante. Par exemple: pour que $MH + OH = a$, il faut et il suffit que $MH = AH$).

Remarquons que si l'on demandait le lieu des points du plan dont la somme des distances à deux droites perpendiculaires est égale à a on trouverait, par raison de symétrie, un carré.

Il n'est peut-être pas inutile de noter que le problème que nous avons étudié n'est qu'un cas particulier de théories classiques, vues d'ailleurs dans la suite du cours.

Soient, en effet, les axes Ox,Oy perpendiculaires. Nous cherchons le lieu des points M dont les coordonnées vérifient:

$$x + y = a, \quad x > O, \quad y > O,$$

ou ce qui est équivalent:

$$y = - x + a, \quad O < x < a.$$

Nous obtenons la portion de la droite d'équation $x + y = a$ situé dans la région $x > O$, $y > O$, ou si l'on veut, le segment de droite représentant graphiquement les variations de la fonction $y = - x + a$ lorsque x varie dans l'intervalle (O, a).

Que conclure de tout cela au point de vue de l'enseignement?

Il ne semble pas souhaitable d'exposer une grande variété de solutions pour chaque problème proposé. Le but est évidemment qu'à la fin d'un cours secondaire les élèves aient déjà acquis un minimum d'habilité et soient en mesure de trouver par eux-mêmes des solutions variées et élégantes de problèmes ne ressemblant pas à ceux déjà faits. Lorsqu'on propose un problème, on n'imposera donc pas une solution, on tiendra compte des idées intéressantes des élèves et on les guidera vers une solution qui sera choisie en tenant compte du niveau de la classe, de la formation antérieure des élèves, de leur degré d'habileté, des réactions de l'auditoire. Ce n'est qu'après un long travail que l'on peut espérer obtenir des élèves, une certaine maîtrise dans l'argumentation.

Ecole Polytechnique,
Montréal.