Jeux et problèmes

Jean M. Turgeon

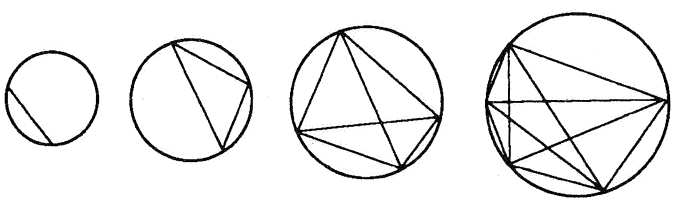
Introduction

C'est avec une certaine nervosité que j'entreprends d'écrire cette chronique **Jeux et problèmes,** la première depuis le départ à la retraite du Frère Jean-Marie Labrie, F.I.C., qui s'est occupé de la faire fonctionner depuis mars 1983, jusqu'au numéro de décembre 1998. Je veux d'abord le féliciter pour ce bel exploit et le remercier, au nom des lecteurs du Bulletin AMQ.

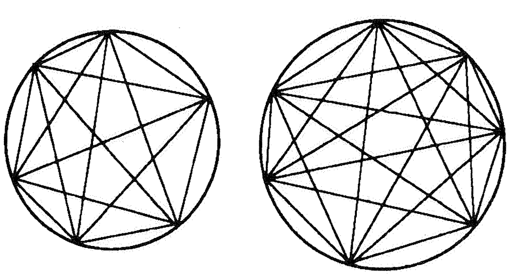
Première partie
Solutions de problèmes déjà posés

Problème 174
Cordes au cou dans un cercle
(*Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, no 3, oct. 1998*)

On considère les six figures ci-dessous. Il s'agit de polygones inscrits dans des cercles. Ces polygones ne sont pas réguliers, de sorte qu'aucune corde ne passe par un point d'intersection de deux autres cordes à l'intérieur du cercle. Le problème consiste à déterminer le nombre des régions déterminées par les cordes, en fonction du nombre n des sommets.



2 points 2 régions — 3 points 4 régions — 4 points 8 régions — 5 points 16 régions



6 points 31 régions — 7 points 57 régions

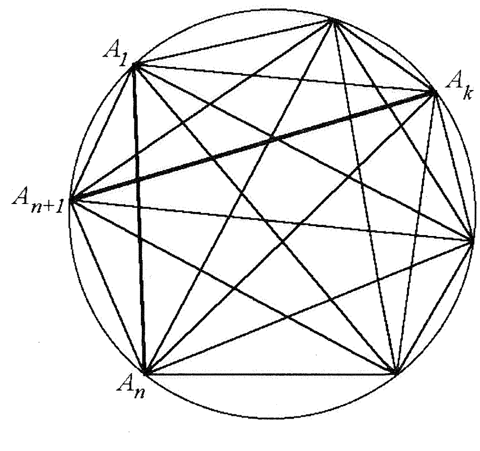
Nous avons déjà publié, dans le numéro de décembre 1998, p. 44, la solution proposée par Charles-Édouard Jean. Cette solution était basée sur un calcul algébrique à partir des valeurs obtenues pour n = 2, 3, ..., 7, sans considérer l'aspect géométrique du problème. Depuis lors nous sont parvenues deux solutions géométriques. Une d'Ernest Laflamme, de Victoriaville, l'autre de Maurice Brisebois. C'est cette dernière, plus courte, que nous vous présentons.

Solution proposée par Maurice Brisebois

La solution présentée ici est en grande partie inspirée par la première de deux solutions au problème 47 de l'ouvrage *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions* (Holden-Day, 1964, tome 1 : *Combinatorial Analysis and Probability*), pages 108-112) ; ce livre de problèmes est la version anglaise d'un livre écrit en russe en 1954 par les jumeaux Akiva et Isak Yaglom. La solution que je propose est à saveur plus combinatoire que la leur.

Le problème résolu par les frères Yaglom s'énonçait comme suit : *Into how many parts do the diagonals of a convex n-gon divide the interior of the n-gon if no three diagonals intersect* ?

Si $f(n)$ dénote le nombre de régions obtenu par les frères Yaglom, l'entier $f(n) + n$ donnera le nombre de régions cherché ici ; en effet, le nombre des régions situées dans le cercle mais à l'extérieur d'un polygone convexe à n côtés inscrit dans le cercle est égal à n.



Yaglom et Yaglom construisent d'abord une relation de récurrence liant $f(n+1)$ et $f(n)$. Ils notent que les régions du n-gone convexe généré par les sommets $A_1, \ldots, A_n$ sont également des régions du $(n+1)$-gone généré par les sommets $A_1, \ldots, A_{n+1}$; il s'agit donc de dénombrer les régions du $(n+1)$-gone qui ne sont pas des régions du n-gone et qui sont générées à partir du sommet A_{n+1}. Ils joignent le sommet A_{n+1} au sommet A_k $(k = 2, \ldots, n\text{-}1)$ et notent que $(k\text{-}1)$ sommets sont situés du même côté de $A_{n+1} A_k$ que A_1. Ainsi $(n–k)$ sommets sont situés du côté opposé à A_1. En conséquence la corde $A_{n+1} A_k$ coupe (k-1)(n-k) régions du n-gone, de sorte que le nombre de segments de la corde $A_{n+1} A_k$ ainsi déterminés est égal à $(k\text{-}1)(n–k) + 1$. Le nombre de régions additionnelles générées par cette corde est aussi donné par $(k\text{-}1)(n–k) + 1$. Ils notent enfin qu'une région, la région triangulaire $A_{n+1}A_1A_n$, n'est pas considérée par cette construction et qu'on doit en tenir compte.

Ils obtiennent donc

$$f(n+1) = f(n) + 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\big((k-1)(n-k)+1\big).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f(n+1) - f(n) &= 1 + \sum_{k=2}^{n-1} ((k-1)(n-k)+1) \\
&= n\sum_{k=2}^{n-1} (k-1) + \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) + (n-1) \\
&= n\sum_{k=1}^{n-2} k - \sum_{k=1}^{n-2} k(k+1) + (n-1) \\
&= \frac{n(n-2)(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (n-1) \\
&= 3\binom{n}{3} - \tfrac{1}{6}\big[(n-2)(n-1)(2n-3) + 3(n-2)(n-1)\big] + (n-1) \\
&= 3\binom{n}{3} - 2\binom{n}{3} + (n-1) \\
&= (n-1) + \binom{n}{3}.
\end{aligned}$$

Il reste à exprimer $f(n)$ en fonction de n. Dans ce but on remplace successivement n par n-1, n-2, … dans la formule trouvée. On obtient la suite d'équations

$$\begin{aligned}
f(n) - f(n-1) &= (n-2) + \binom{n-1}{3} \\
f(n-1) - f(n-2) &= (n-3) + \binom{n-2}{3} \\
&\ \ldots \\
f(5) - f(4) &= (3) + \binom{4}{3} \\
f(4) - f(3) &= (2) + \binom{3}{3}.
\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre cette suite d'équations, on obtient

$$f(n) = f(3) + \sum_{i=2}^{n-2} i + \sum_{i=3}^{n-1}\binom{i}{3}.$$

Or $f(3) = 1$,

$$\sum_{i=2}^{n-2} i = \sum_{i=1}^{n-2} i \ -1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 = \binom{n-1}{2} - 1$$

et en vertu de la formule de Pascal :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

et de la relation

$$\binom{3}{3} = 1 = \binom{4}{4},$$

on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{n-1}\binom{i}{3} &= \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{n-1}{3} \\
&= \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{n-1}{3} \\
&= \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \ldots + \binom{n-1}{3} \\
&= \binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \ldots + \binom{n-1}{3} \\
&\ \ldots \\
&= \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{3} \\
&= \binom{n}{4}.
\end{aligned}$$

La solution du problème de Yaglom et Yablom est donc

$$f(n) = \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}.$$

Pour notre problème de régions déterminées par des cordes, le nombre cherché est donc

$$n+\binom{n}{4}+\binom{n-1}{2}.$$

En évaluant cette expression sous la forme d'un polynôme, on retrouve bien la solution proposée par Édouard-Charles Jean dans le dernier numéro du *Bulletin.*

Deuxième partie
Nouveaux jeux et problèmes

Problème 179
Différence de cubes positifs

Trouver toutes les façons d'exprimer le nombre 3 367 comme différence de deux cubes positifs.

Problème 180
Racines carrées de grands nombres

Le présent numéro du Bulletin contient un article intitulé *Petites calculatrices, grands nombres*, où l'on traite du meilleur parti que l'on peut tirer d'une calculatrice à huit chiffres pour effectuer des additions, soustractions, multiplications et divisions sur des nombres à plus de huit chiffres. Qu'en est-il du calcul de la racine carrée ? Le lecteur est invité à inventer la meilleure méthode pour calculer la racine carrée, disons, du nombre à 24 chiffres

$$175\ 958\ 611\ 081\ 587\ 144\ 588\ 996,$$

en s'aidant d'une calculatrice à huit chiffres.

Problèmes 181
Un triangle à construire avec la règle et le compas

Construire un triangle connaissant sa base, le pied de sa hauteur sur cette base et la différence, non nulle, des deux autres côtés.

Problème 182
L'alphamétique d'un naufrage

Résoudre l'alphamétique suivant, inventé par Mathieu Dufour :

$$\begin{array}{r} \text{ICEBERG} \\ \times\, 6 \\ \hline \text{TITANIC} \end{array}$$

Veuillez adresser toute correspondance à :

Jean M. Turgeon (Mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, Succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3J7

Téléphone : 514-343-7178
Courrier : turgeon@dms.umontreal.ca