Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

Introduction

En cette 16^{e} année de cette chronique, l'intérêt se maintient et c'est le problème 157 qui a suscité le plus de courrier avec l'auteur de cette chronique. C'est encourageant. Plusieurs amateurs de problèmes nous ont envoyé des solutions. Je veux remercier bien chaleureusement Alain Roy, de Beloeil, Philippe Finès, étudiant au doctorat de Sherbrooke, Jean Goulet, doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Sherbrooke, Christophe Sokolnicki du Collège Marianoplis, Michèle Béliveau du Collège de Sherbrooke et Madame Astrid Defence de Montréal qui m'ont envoyé presque en même temps des solutions au problème 157. Même si, dans l'ensemble des solutions reçues, il y a des ressemblances, vous verrez dans la présentation qui suit les nuances intéressantes apportées par plusieurs. J'ai reçu également des solutions pour les problèmes 162, 165 et 167.

Problème 157 :
Carré inscrit dans un triangle rectangle !
Bulletin AMQ, déc. 1996, p. 38

J'ai choisi, pour commencer, la solution suggérée par Alain Roy mais j'ai changé quelque peu la notation. Soit les figures 1 et 2 ci-dessous.

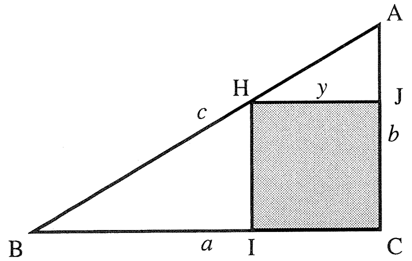

Fig. 1

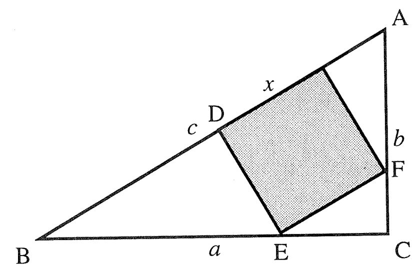

Fig. 2

a. Trouver l'aire du carré HICJ et l'aire du carré DEFG.

b. Montrer que l'aire du carré DEFG est inférieure à l'aire du carré HICJ.

c. Trouver la longueur du côté x et celle du côté y en fonction des longueurs des côtés a, b et c. Soit m FC = z et m EC = d.

A) Dans la Fig. 2, on a quatre triangles semblables : ABC, BED, ECF et FAG.

1) Par les triangles semblables ECF et BED, on a :

$$\frac{z}{x} = \frac{x}{a-d}$$

d'où,

$$x^2 = z(a-d) \qquad (1)$$

2) Par les triangles semblables ECF et ABC, on a :

$$\frac{z}{b} = \frac{d}{a} = \frac{x}{c}$$

d'où,

$$d = {}^{ax}\!/_{c} \qquad (2)$$

et

$$z = {}^{bx}\!/_{c} \qquad (3)$$

3) Dans (1), substituons les valeurs de d et z :

$$x^2 = \frac{bx}{c}(a - \frac{ax}{c})$$

d'où,

$$x = \frac{b}{c}(\frac{ac - ax}{c})$$

$$c^2x = abc - abx$$

$$c^2x + abx = abc$$

$$x(c^2 + ab) = abc$$

$$x = \frac{abc}{c^2 + ab}$$

4) Aire du carré DEFG :

$$(\frac{abc}{c^2 + ab})^2$$

B) Dans la Fig. 1, les triangles ABC et AHJ sont semblables. On a donc :

$$\frac{b}{b - y} = \frac{a}{y}$$

Ce qui donne :

$$by = ab - ay$$

ou encore

$$y = \frac{ab}{a + b}$$

Aire du carré HICJ :

$$\frac{a^2b^2}{(a + b)^2}$$

C) Il reste à montrer que l'aire du carré DEFG est inférieure à l'aire du carré HICJ.

On doit avoir :

$$(\frac{ab}{a + b})^2 - (\frac{abc}{c^2 + ab})^2 > 0$$

En mettant au même dénominateur et en réduisant les termes semblables, on arrive à l'inégalité suivante qui est toujours vraie :

$$a^2b^2 > 0$$

Première observation qui vient de Jean Goulet

Pour mieux comprendre son observation, soit les deux figures 3 et 4 suivantes :

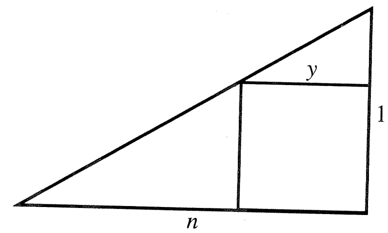

Fig. 3

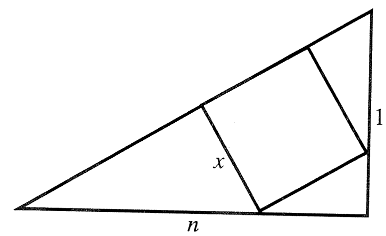

Fig. 4

Sans perte de généralité, on peut présumer que la base du triangle est "n" et la hauteur est 1. Dans ces conditions et par application des propriétés des triangles semblables, on peut voir que l'aire du premier carré HICJ est donnée en fonction de "n" de la façon suivante:

$$y^2 = \frac{n^2}{(n + 1)^2}$$

De même, on peut calculer l'aire du carré DEFG, inscrit sur l'hypoténuse du triangle ABC comme suit :

$$y^2 = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - 1}{\sqrt{n^2 + 1} + 1}$$

On voit que la différence entre les deux aires est toujours positive, comme on l'a montré dans la preuve d'Alain Roy. Toutefois, et c'est cela qui est intéressant dans l'observation de Jean Goulet, cette différence tend vers 0 quand "n" tend vers l'infini. Ce phénomène correspond à l'idée intuitive que l'on a au départ ; en effet, lorsque l'on augmente la valeur de "n", on peut observer le carré qui tend à "se coucher" de plus en plus sur la base du triangle ; ce qui permet pratiquement à ramener le cas "deux" au cas "un". Voici un tableau qui le montre :

n	Coin	Hypoténuse	Différence
1	0,250000	0,171573	0,078427
2	0,444444	0,381966	0,062478
3	0,562500	0,519494	0,043006
4	0,640000	0,609612	0,030388
5	0,694444	0,672078	0,022366
10	0,826446	0,819002	0,007444
15	0,878906	0,877534	0,003647
20	0,907029	0,904875	0,002154
30	0,936524	0,935519	0,001006
40	0,951814	0,951234	0,000580
50	0,961169	0,960792	0,000377
100	0,980296	0,980199	0,000097
200	0,990075	0,990050	0,000025
300	0,993367	0,993356	0,000011
600	0,996675	0,996672	0,000003
1000	0,998003	0,998002	0,000001

Voici une autre solution suggérée par Madame Astrid Defence, étudiante au doctorat sous la direction d'Anna Sierpinska. Voici ce qu'elle écrit :

« *Ce problème 157 a attiré mon attention parce que je venais de travailler sur les problèmes de transformation dans un cours que je suivais à l'Université Concordia avec Jana Trgalova et nous avons parlé de tels carrés.* »

Soit les figures 5 et 6

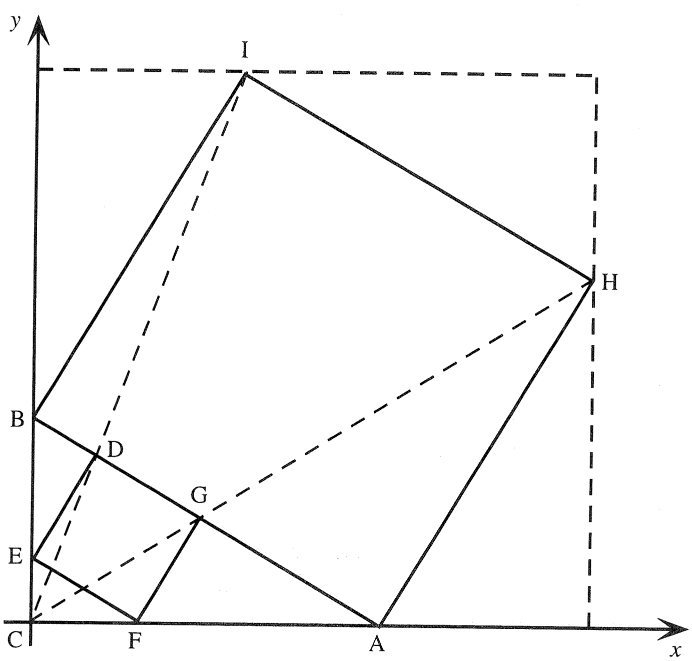

Fig. 5

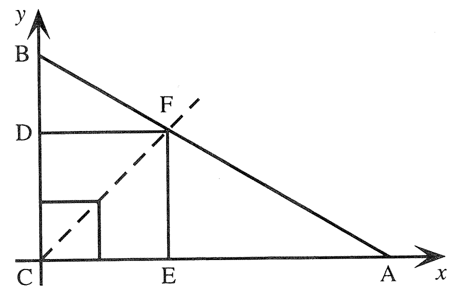

Fig. 6

A. Le carré DEFG est inscrit dans le triangle ABC dont le sommet de l'angle droit est situé à l'origine du plan cartésien.Un carré ABHI est construit sur le côté AB du triangle ABC. Les segments IC et HC sont construits de façon qu'ils coupent AB en D et E respectivement.

Le carré DEFG est une homothétie du carré ABHI dont le centre d'homothétie est le point C. On a les coordonnées des points A(0, b) et B(a, 0).

Pour calculer l'aire du carré DEFG, il suffit de connaître la mesure du côté DE. Trouvons donc les coordonnées des points D et E.

1) L'équation de la droite passant par le côté AB est :

$$y = \frac{b-a}{a}x + b \qquad (1)$$

2) Soit le point I(b, $b + a$). L'équation de la droite passant par le côté CI est :

$$y = \frac{a+b}{b}x \qquad (2)$$

3) Soit le point H($a + b$, a). L'équation de la droite passant par le côté CH est :

$$y = \frac{a}{a+b}x \qquad (3)$$

4) En résolvant les équations pour les côtés AB et CI, on trouve les coordonnées du point

$$D\left(\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+ab+b^2}\right)$$

5) En résolvant les équations pour les côtés AB et CH, on trouve les coordonnées du point

$$E\left(\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\right), \frac{a^2b}{a^2+ab+b^2}$$

6) En appliquant la formule pour la distance entre deux points, on arrive facilement à l'aire du triangle DEFG :

$$\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+ab+b^2)^2}$$

B. Cette fois-ci, le carré DCEF peut être déterminé comme une homothétie de n'importe quel carré placé à l'origine et à l'intérieur du triangle ABC. Le point F reste sur la diagonale qui passe par le point C. Cette diagonale a pour équation : $y = x$. Le point F a pour coordonnées :

$$\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$$

1) L'équation de la droite passant par le côté AB est :

$$y = -\frac{b}{a}x + b \qquad (6)$$

2) L'aire du carré DCEF est :

$$\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$$

3) Il reste à montrer que :

$$\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+ab+b^2)} < \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$$

4) Après avoir mis au même dénominateur et après avoir simplifié les termes semblables, on obtient un énoncé vrai :

$$0 < a^2b^2$$

Remarque

Les solutions des problèmes 162, 163, 165, 167, 168 et 169 seront données dans le prochain numéro du Bulletin.

Nouveaux jeux et problèmes

Problème 170

Soit $2^3 = 3^2 - 1^2$

$3^3 = 6^2 - 3^2$

Quels sont les deux carrés dont la différence est égale à 20^3 ?

Trouver une formule générale pour tout nombre entier au cube.

Problème 171

Combien de façons différentes peut-on découper un carré en quatre rectangles semblables ? Représenter chacune des situations et montrer qu'elle existe.

Veuillez adresser toute correspondance à :

Jean-Marie Labrie
Faculté d'éducation (DEPP)
Université de Sherbrooke
Sherbrooke (Québec) J1K 2R1
Télécopieur : (819) 821-8048