CONCOURS DE L'AMQ 1982
NIVEAU COLLÉGIAL

QUESTION 1

Déterminez l'intervalle des valeurs de x pour lesquelles l'inégalité ci-dessous est vérifiée:

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$$

Solution

Le membre de gauche ne peut être défini que si $x \neq 0$, et n'être réel que si $x \geq -1/2$. Supposons alors que l'inégalité soit satisfaite. En multipliant le numérateur et le dénominateur du membre de gauche par $(1 + \sqrt{1+2x})^2$, nous aurons après simplification

$$(1 + \sqrt{1+2x})^2 < 2x + 9$$

Posons

$$y = \sqrt{1+2x} \qquad (1)$$

nous aurons alors

$$(1 + y)^2 < y^2 + 8$$

d'où

$$y < \frac{7}{2}$$

Donc, en vertu de (1)

$$1 + 2x < \frac{49}{4}$$

et

$$x < \frac{45}{8}$$

Ainsi, l'inégalité initiale sera vérifiée dans la mesure où

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8} \text{ et } x \neq 0$$

QUESTION 2

Montrer que la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible, quel que soit l'entier n.

Solution

Supposons qu'il existe un entier $g > 0$ qui divise à la fois le numérateur et le dénominateur de cette fraction. Alors il doit aussi exister deux entiers A et B tels que

$$21n + 4 = gA \quad \text{et} \quad 14n + 3 = gB$$

Alors

$$g(3B - 2A) = 3gB - 2gA = 42n + 9 - 42n - 8 = 1$$

Il faut donc que $g = 1$. Ce qui démontre le résultat cherché.

QUESTION 3

Le permanent d'une matrice carrée est défini comme le déterminant de cette matrice, sauf que, dans le développement, chaque signe **moins** est remplacé par un signe **plus**. Ainsi, le permanent de

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

serait aei + bfg + cdh + gec + hfa + idb. On demande de trouver la valeur du permanent de la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1\times 1 & 1\times 2 & \dots & 1\times n \\ 2\times 1 & 2\times 2 & \dots & 2\times n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ n\times 1 & n\times 2 & \dots & n\times n \end{bmatrix}$$

Solution

Le nombre de termes d'un tel permanent est égal à n! Montrons-le par induction sur n.

Nous savons que le permanent donné en exemple possède 3! termes, et il est facile de vérifier que le permanent d'une matrice 2×2 possède 2! termes. Supposons donc que le permanent d'une matrice d'ordre $n\times n$ possède n! termes. Alors une matrice d'ordre $(n+1)\times(n+1)$ possède autant de termes que le nombre d'éléments de la première rangée multiplié par le nombre de termes dans le permanent d'une matrice de $n\times n$ éléments: $(n+1)\times n!$ termes.

Dans chaque terme du permanent cherché, un et un seul facteur pris dans chaque rangée et dans chaque colonne intervient, donc chaque terme vaut $n!\times n!$ Il s'ensuit que le permanent vaut $(n!)^3$.

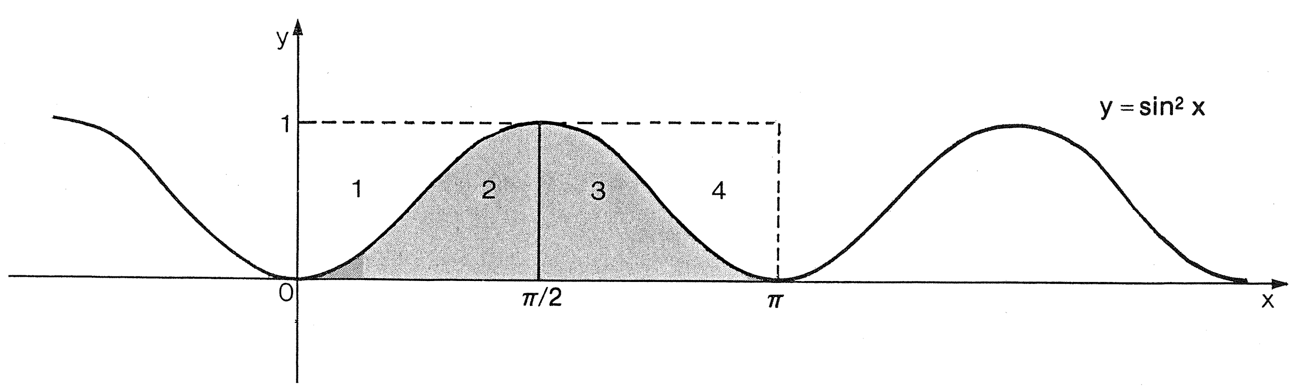
QUESTION 4

En vous servant de l'identité trigonométrique $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et de la géométrie élémentaire, montrez que l'aire sous la courbe $y = \sin^2 x$ (où x varie de 0 à π) est égale à $\pi/2$.

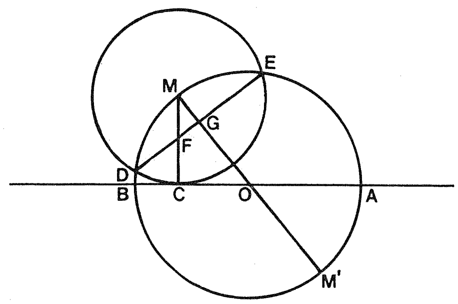
Remarque. Ne pas utiliser le calcul intégral (on demande ici une solution vraiment élémentaire).

Solution

En vertu de la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, en chaque point de l'intervalle de variation de x, la différence entre la courbe et le rectangle de hauteur unité est égal à $\cos^2 x$. D'autre part, les aires 1 et 3 sont égales par suite de la relation $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, d'où $\cos^2 x = \sin^2(x + \pi/2)$. Nous pouvons établir de la même façon que les aires 2 et 4 sont égales. Nous concluons donc que l'aire sous la courbe est égale à la moitié du rectangle de hauteur unité et de longueur π, soit à $\pi/2$.



QUESTION 5



D'un point M d'une circonférence de diamètre AB, on abaisse la perpendiculaire MC à ce diamètre; avec M pour centre et MC pour rayon, on trace la circonférence qui coupe la première suivant la corde DE.

Démontrer que la corde DE coupe MC en son point milieu.

Solution

De la similitude des triangles MGF et MCO, nous tirons la relation

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{MO}}$$

d'où

$$2\overline{MC} \cdot \overline{MF} = 2\overline{MO} \cdot \overline{MG} = \overline{MM'} \cdot \overline{MG} \qquad (1)$$

De la similitude des triangles MDM' et MGD, nous tirons la relation

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MM'}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{MD}}$$

donc,

$$\overline{MM'} \cdot \overline{MG} = \overline{MD}^2$$
$$= \overline{MC}^2$$

en tant que rayons du cercle de centre M.

En comparant avec (1),nous concluons que $\overline{MC}^2 = 2\overline{MC} \cdot \overline{MF}$

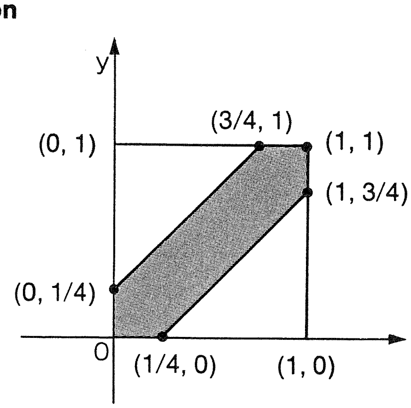
donc $\overline{MC} = 2\overline{MF}$

Ce qu'il fallait démontrer.

QUESTION 6

Deux personnes conviennent de se rencontrer entre midi et 13 heures à un endroit donné. Elles conviennent aussi que la première personne arrivée attendra pendant 15 minutes, ou bien jusqu'au coup de 13 heures, selon la première éventualité, puis partira. Quelle est la probabilité qu'elles se rencontrent effectivement, sachant que chacune est susceptible d'arriver au hasard au lieu du rendez-vous à un moment quelconque entre midi et 13 heures?

Solution



Désignons respectivement par x et y le moment de l'arrivée de chacun. Alors nous pouvons représenter x et y par des valeurs quelconques prises dans l'intervalle [0, 1]. Soit alors P un point de coordonnées (x, y) dans le carré unité. Pour que la rencontre se produise, il faut que $|x - y| \leq 1/4$, donc

$$-\frac{1}{4} \leq x - y \leq \frac{1}{4}$$

Les points qui satisfont cette double inégalité se situent dans la zone tramée de la figure ci-contre dont l'aire est égale à

$$1 - 2\ (\text{aire du triangle ABC}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Ce qui donne la probabilité recherchée.