LES NOMBRES HEXAGONAUX[1]

Stuart Fiske, Luc Forest, Pierre Morin et Claude Poirier, étudiants
Camp mathématique, été 1981

En pensant aux nombres carrés et aux nombres triangulaires, nous nous sommes demandé s'il pouvait exister une autre sorte de nombres qui pourraient être représentés par une forme géométrique.

Effectivement, nous en avons trouvé une: ce sont les nombres hexagonaux tels que 1, 7, 19, 37, 61, 91, ...

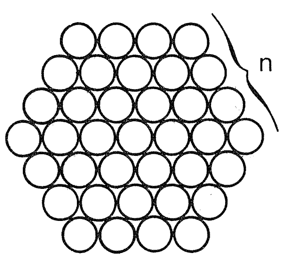
Nous avons donc essayé, en utilisant différentes méthodes, de trouver une équation pouvant représenter tout nombre hexagonal.

Définition des variables

x= nombre hexagonal;

n = nombre de cercles contenus dans un des côtés de x.

Exemple
n=4
x=37



Première méthode

La première méthode est celle des trapèzes. Nous isolons d'abord la ligne centrale de l'hexagone pour former deux trapèzes identiques (fig. 1).
On sait que l'aire, A, des deux trapèzes est:

$$A = 2[(2n-2)+(2n-3)+\ldots+(2n-n)]$$
$$= 2\left\{-[1+2+3+\ldots+(2n-2)]+\left[\frac{(2n-2)(2n-1)}{2}\right]\right\}$$
$$= 3n^2-5n+1$$

Donc

$$x = (3n^2-5n+2)+(2n-1)$$

ou $$\mathbf{x = 3n^2 - 3n + 1}$$

Deuxième méthode

Voyons maintenant une deuxième méthode pour obtenir cette formule:

$$x = 3n^2-3n+1$$

Dans l'exemple de la figure 2, le nombre de cercles coupés par les droites est:

$$6(n-1)+1 = 6(4-1)+1 \qquad (1)$$
$$= 19$$

Et le nombre de cercles qui ne sont coupés par aucune droite est:

$$6\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right] = 6\left[\frac{(4-2)(4-1)}{2}\right] \qquad (2)$$
$$= 18$$

En additionnant les nombres obtenus en (1) et (2), nous avons:

$$x = 19+18 = 37 \qquad (\text{pour } n = 4)$$

En général,

$$x = 6(n-1)+1+6\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]$$
$$= 6n-6+1+3(n-2)(n-1)$$
$$= 6n-5+3(n^2-3n+2)$$
$$= 6n-5+3n^2-9n+6$$
$$\mathbf{x = 3n^2 - 3n + 1}$$

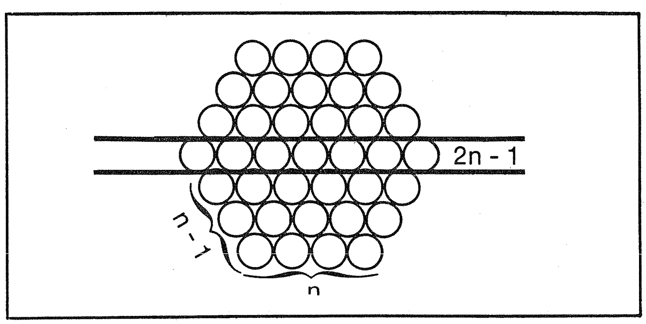


Figure 1

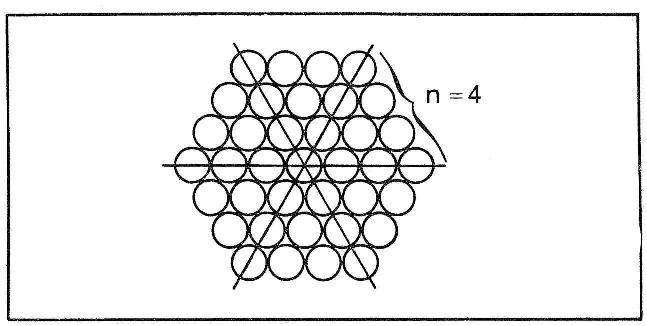


Figure 2

Troisième méthode

Nous pouvons aussi trouver l'équation d'un nombre hexagonal en divisant ce nombre en 6 nombres triangulaires (fig. 3).

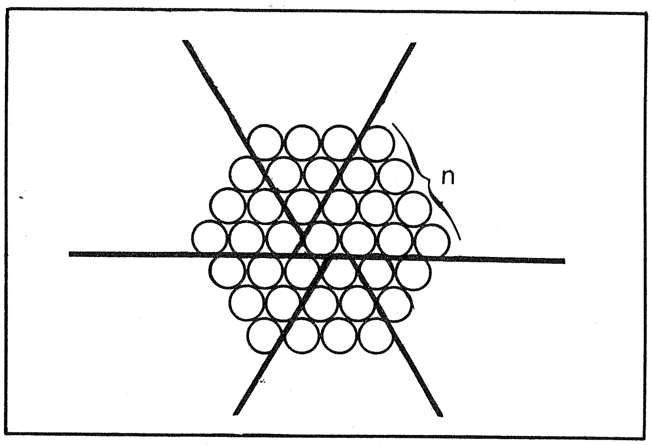


Figure 3

On voit que x est la somme d'un triangle de base n, de quatre triangles de base (n – 1) et d'un dernier triangle de base (n – 2).

Donc

$$x = \frac{n(n+1)}{2} + 4\,\frac{[n-1][(n-1)+1]}{2} + \frac{[n-2][(n-2)+1]}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+4n^2-4n+n^2-3n+2}{2}$$

$$= \frac{6n^2-6n+2}{2}$$

$$\mathbf{x = 3n^2 - 3n + 1}$$

Quatrième méthode

Une quatrième façon de trouver l'équation d'un nombre hexagonal est de compléter sa représentation schématique de manière à obtenir un triangle (fig. 4).

On voit que la base du grand triangle est $n + 2(n-1)$ donc $3n - 2$.

Représentons le grand triangle par T et un des petits triangles par t; x étant toujours le nombre hexagonal.

$$T = \frac{[3n-2][(3n-2)+1]}{2}$$

$$= \frac{9n^2-9n+2}{2}$$

$$t = \frac{[n-1][(n-1)+1]}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

$$x = T - 3t$$

$$= \frac{9n^2-9n+2}{2} - 3\,\frac{n^2-n}{2}$$

$$= \frac{9n^2-9n+2-3n^2+3n}{2}$$

$$= \frac{6n^2-6n+2}{2}$$

$$\mathbf{x = 3n^2 - 3n + 1}$$

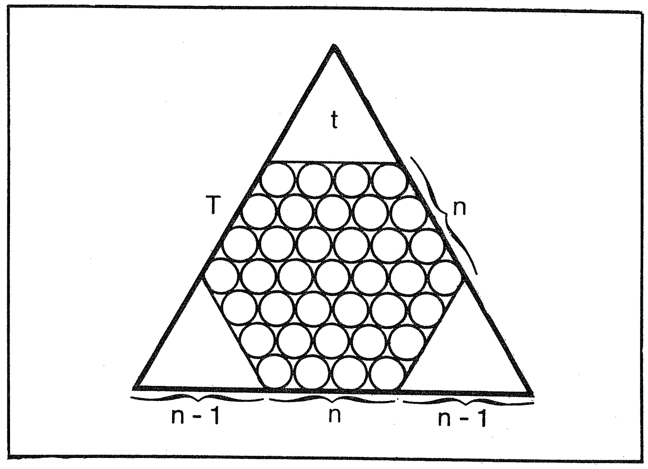


Figure 4

Cinquième méthode

Enfin, voici la cinquième méthode que nous avons utilisée pour obtenir la formule générale des nombres hexagonaux.

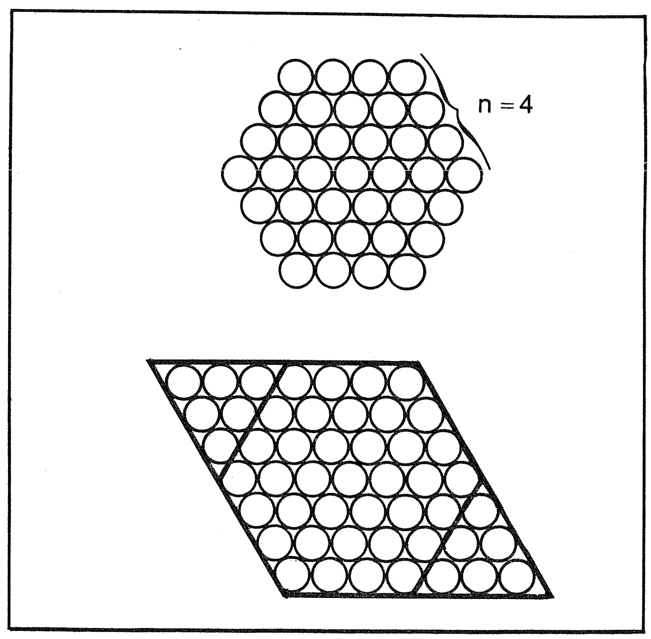


Figure 5

Nous complétons d'abord la représentation du nombre hexagonal de manière à former un losange. Dans l'exemple de la figure 5, $n = 4$, le nombre de cercles, au départ, est 37. L'aire du losange est

$$7 \times 7 = 49$$

Si on enlève les cercles qui n'appartiennent pas à la représentation du nombre hexagonal, on obtient

$$49 - 2(6) = 37$$

En général,

$$x = (2n-1)^2 - 2\,\frac{(n-1)(n)}{2}$$
$$= 4n^2 - 4n + 1 - (n^2 - n)$$
$$\mathbf{x = 3n^2 - 3n + 1}$$

Conclusion

Nous pouvons donc dire sans nous tromper que

$$x = 3n^2 - 3n + 1$$

Ce résultat est purement mathématique et ne représente pas grand-chose dans le monde concret. Le seul résultat un peu concret que nous avons obtenu est qu'un nombre hexagonal est la somme d'un nombre triangulaire multiplié par 4, du nombre triangulaire qui précède immédiatement ce dernier et du nombre triangulaire qui le suit immédiatement.

Exemple

Nombres triangulaires: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

$$x = 1 + 4(3) + 6 = 19$$
$$x = 3 + 4(6) + 10 = 37$$
$$x = 6 + 4(10) + 15 = 61$$
$$x = 10 + 4(15) + 21 = 91$$

Nous sommes arrivés à ce résultat en utilisant la troisième méthode.

1. Lors du camp mathématique de l'été 81, les étudiants ont présenté des travaux dont plusieurs sont très intéressants. Des difficultés de transcription ne nous permettront pas de les publier tous. Pour le numéro de mai, le travail de MM. S. Fiske, L. Forest, P. Morin et C. Poirier a été retenu.

LISTE DES GAGNANTS DU CONCOURS DE L'AMQ 1982

BERNIER, David	Collège François-Xavier-Garneau	200$
DESJARDINS, Benoît	Collège Bois-de-Boulogne	150$
DUBOIS, Michel	Collège de Drummondville	80$
LACOMBE, Yves	Collège de Maisonneuve	50$
COMEAU, Jean-Paul	Collège de Ste-Foy	45$
CROCHETIÈRE, Marc	Collège Bois-de-Boulogne	40$
CLOUTIER, Sylvie	Collège Mérici	30$
DESTREMPES, François	Collège Bois-de-Boulogne	25$
LAVOIE, Bruno	Collège de St-Félicien	25$
NGUYEN, Quan Loc	Collège de Rosemont	25$
FOREST, Luc	Collège de l'Assomption	25$
DEROME, Philippe	Collège Jean-de-Brébeuf	20$
BOIVIN, Réjean	Collège de Maisonneuve	20$
JOHNS, Dennis	Marianopolis College	20$
GAUTHIER, Jean-Guy	Collège de Maisonneuve	20$
HAINS, Gaétan	Collège d'Ahuntsic	20$
MAJOR, Pierre	Collège André-Grasset	20$

Mentions honorables

AUCLAIR, Sylvain	Collège Bois-de-Boulogne
BEAUDOIN, Jean-Claude	Collège André-Grasset
BHATTACHARYA, Robin	Champlain College (St-Lambert-Longueuil)
BOILARD, André	Collège de Lévis
BOOTHROYD, Derek	Marianopolis College
BOUCHARD, Luc	Collège de Ste-Foy
BOYER, Denis	Collège de Valleyfield
CHAMBERLAND, Martin	Collège de Ste-Foy
CHEE, Michel	Marianopolis College
COUTURE, Éric	Collège Jean-de-Brébeuf
DUFOUR, François	Collège de Ste-Foy
DUMAIS, Claude	Collège de Sept-Iles
GIRARD, Luc	Collège d'Ahuntsic
HO, Jen	Marianopolis College
KOVALIK, Joseph	Marianopolis College
LAJOIE, Michel	Collège de Limoilou
LAPOINTE, Line	Collège de Drummondville
LEGAULT, Éric	Collège Jean-de-Brébeuf
LEYMARIE, Frédéric	Collège Bois-de-Boulogne
LONGPRÉ, Martin	Collège de l'Assomption
MARCOVICI, Monica	Marianopolis College
PARADISSIS, Alex	Marianopolis College
PRIMEAU, Éric	Collège Marie-Victorin
PROVIDENTI, Cesar	Marianopolis College
RANCOURT, Denis	Collège de Lévis
ROUX, Daniel	Collège de Ste-Foy
SEUFERT, Michael	Champlain College (Lennoxville Campus)
WINIKOFF, Steven	Marianopolis College
WONG, Norman	Vanier College (Snowdon Campus)