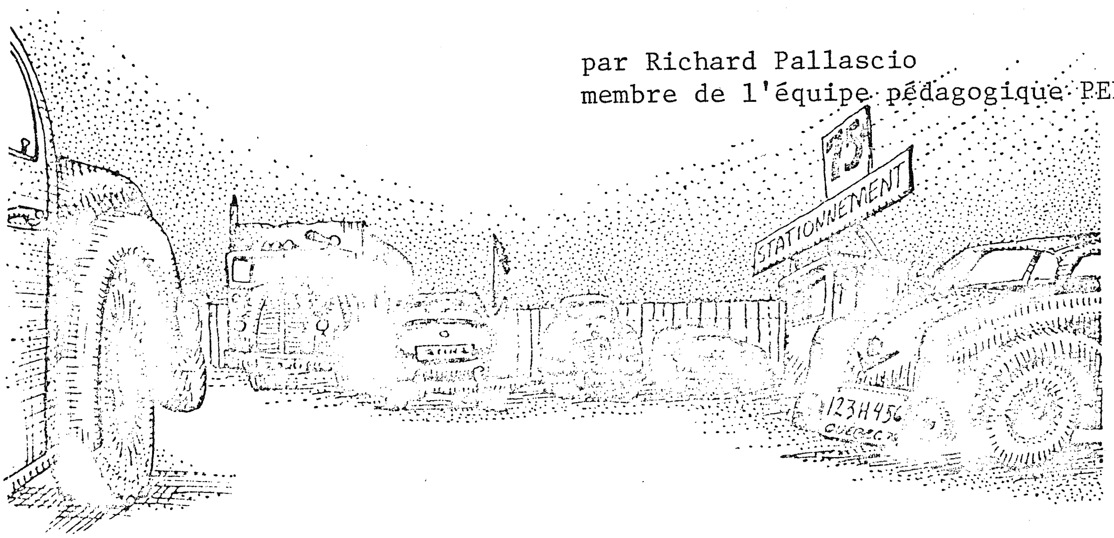
π dans la rue!

par Richard Pallascio
membre de l'équipe pédagogique PERMAMA



Présentation

Voici une activité* qui peut se présenter sous forme de jeu, tout en étant une application de plusieurs notions mathématiques. Elle requiert à la fois la participation individuelle de tous les élèves d'un groupe et une participation collective dans la réalisation d'un graphique cumulatif.

L'idée de base est de se servir de nombres aléatoires engendrés par un phénomène réel (les plaques d'immatriculation d'automobiles stationnées dans le centre commercial voisin, les numéros de téléphone d'une page d'annuaire téléphonique, etc.), de l'idée intuitive d'une distribution au hasard et de l'équation du cercle, pour trouver une bonne approximation du nombre π.

Description

PARTIE 1: Chaque élève a à réaliser une première approximation de π.

A partir d'une centaine de couples de nombres aléatoires compris entre 0 et 100 (0 et 100 exclus), et d'un graphe cartésien discontinu de 100×100, le concept de distribution aléatoire nous indique que dans

*in. Simulations et jeux, de Bernard Fraser, Raynald Lacasse et Richard Pallascio, PMM 5005, Ed. Télé-université, pages 52 à 58, section 4.3. Publié avec la permission des auteurs et de la Télé-université.

la mesure où les nombres sont engendrés au hasard, ceux-ci se distribueront aléatoirement et dans des proportions relativement égales, eu égard aux proportions de leur aire d'appartenance respective, et ceci de plus en plus, à mesure que la quantité de nombres aléatoires grandit.

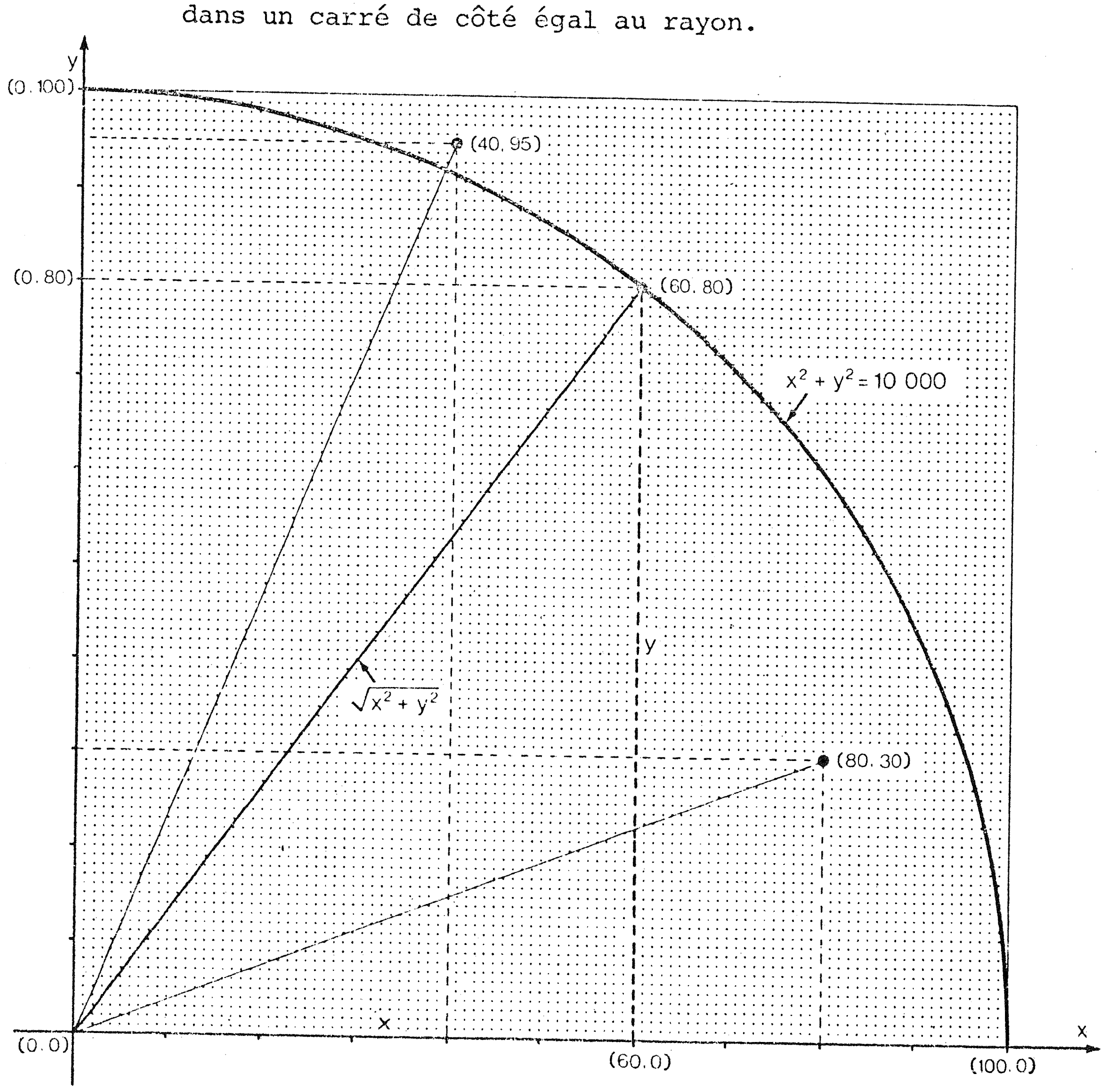
Expliquons-nous!

Considérons le quart de cercle de rayon 100. L'équation de ce cercle est:

$$x^2 + y^2 = 100^2.$$

Pour les plus jeunes, la relation est facile à visualiser par le théorème de Pythagore.

FIGURE 1 - Graphe d'un quart de cercle inscrit dans un carré de côté égal au rayon.



Un couple de nombres compris entre 0 et 100 détermine un point du graphe cartésien. Celui-ci peut se distinguer de la façon suivante:

a) Si les nombres x et y du couple (x, y) sont tels que la somme de leurs carrés, soit $x^2 + y^2$, est inférieure à 100^2 ou 10 000, le point qui le représente sur le graphe sera à l'intérieur de l'arc de cercle.

b) Sinon, c'est-à-dire si $x^2 + y^2$ est supérieur à 10 000, le point sera à l'extérieur de l'arc de cercle.
Remarque: les points-frontière sont ignorés*.

Nous connaissons l'aire du cercle (πr^2) et par conséquent l'aire du quart de celui-ci $\left(\frac{\pi r^2}{4}\right)$. De même nous connaissons l'aire du carré circonscrit à ce quart de cercle (r^2). Le rapport de l'aire du quart de cercle sur l'aire totale du carré sera donc:

$$\frac{\frac{\pi \cdot 100^2}{4}}{100^2} = \frac{\pi}{4} .$$

Le principe de la distribution au hasard nous permet donc de dire que pour une assez grande quantité de couples de nombres pris au hasard entre 0 et 100, le rapport de la quantité de couples (x, y) tels que $x^2 + y^2 < 10\ 000$ sur le nombre total de couples relevés, approxime la valeur $\frac{\pi}{4}$, qui est le rapport des aires correspondantes. Donc, le rapport obtenu, multiplié par 4, approximera π.

Soit a le nombre de couples (x, y) tels que

$$x^2 + y^2 < 10\ 000;$$

soit b le nombre total de couples (x, y) relevés.

Alors le rapport $\frac{a}{b}$ approxime $\frac{\pi}{4}$, ou bien: $\frac{4a}{b}$ approxime π.

---

* On appelle points-frontière les couples de nombres contenant un ou deux zéros, de même que les couples de nombres tels que $x^2 + y^2 = 10\ 000$, par exemple (60, 80).

PARTIE 1 - Démarche

Il s'agit simplement que chaque élève recueille une centaine de couples de nombres pris au hasard entre 0 et 100 (0 et 100 exclus).

Les plus jeunes (Secondaire I, II, III) peuvent les prélever à partir des plaques d'immatriculation des automobiles stationnées dans un centre commercial ou les rues avoisinant leur domicile. Les plaques sont habituellement de la forme: 123 A 456. Il s'agit de ne retenir que les deux derniers chiffres du nombre de gauche, ainsi que les deux derniers chiffres du nombre de droite, soit dans notre exemple, le couple (23, 56).

Les plus vieux (Secondaire IV et V) peuvent les prélever à partir des numéros de téléphone tirés d'une quelconque page d'un annuaire téléphonique. En n'utilisant que les quatre derniers chiffres de chaque numéro (les trois premiers étant un code local, ils peuvent "biaiser" l'expérience en revenant plus souvent qu'à leur tour, c'est-à-dire en n'étant pas aléatoires), on trouve deux nombres compris entre 0 et 100 qui composent un couple (x, y).

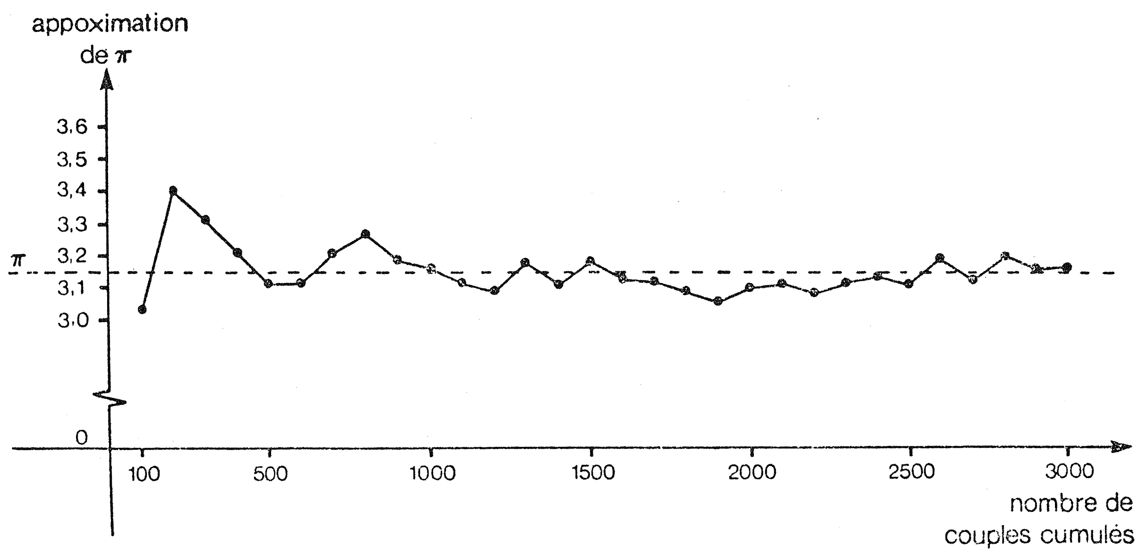
Il s'agit ensuite de calculer a, b et le rapport $\frac{4a}{b}$, qui approximera π.

PARTIE 2: Tous les élèves participent à la réalisation d'un graphique cumulatif d'une meilleure approximation de π.

L'illustration d'une certaine progression vers une meilleure approximation de π est une activité intéressante et facile à réaliser. Elle tient tout simplement compte de la quantité croissante de couples (x, y).

Supposons que vos trente élèves aient prélevé chacun 100 couples (x, y). Des rapports peuvent être calculés en additionnant à chaque fois les résultats d'un autre élève et nous pouvons obtenir un graphique du genre de celui-ci:

FIGURE 2 - Graphe des diverses approximations de π en fonction d'une accumulation de couples de nombres aléatoires.



Evidemment, plus on avance, plus l'apport de 100 nouveaux couples a une contribution minime par rapport à la quantité de couples cumulés, ce qui a pour conséquence de diminuer les écarts possibles d'un point à l'autre. Par contre, la quantité aidant, l'approximation est de plus en plus près de la valeur de π. C'est une bonne situation pour illustrer la notion de limite, à partir d'un schéma visuel dont les données proviennent de la réalité!

PARTIE 2 - Démarche

Chaque élève considère les 100 premiers couples qu'il a prélevés et il inscrit sur sa feuille les nombres a et b, le nombre b étant le même pour tous, soit 100.

Le premier calcule le rapport déjà identifié, soit $\frac{4a_1}{100}$, note celui-ci et passe sa feuille au deuxième qui additionne ses valeurs à celles du premier et calcule:

$$\frac{4(a_1 + a_2)}{2 \times 100}$$

et ainsi de suite, jusqu'au dernier qui calcule:

$$\frac{4\left((a_1 + a_2 + \ldots + a_{29}) + a_{30}\right)}{30 \times 100}$$

A mesure qu'un élève a calculé son rapport, dans l'ordre, il va l'inscrire au tableau où un graphe approprié a déjà été prévu et relie son point au point précédent (sauf le premier) par un segment de droite. Le résultat devrait être semblable au graphe de la page précédente, et l'approximation finale de π, très bonne, quoiqu'un peu supérieure à la valeur réelle de π, dû à l'ignorance volontaire des points-frontière.

Remarque:

Il est à noter que la moyenne arithmétique des rapports obtenus par chacun des élèves équivaut à l'approximation finale! L'objectif ici est d'illustrer la progression d'une telle approximation en fonction du nombre de couples prélevés.

Utilisation

OBJECTIFS

de contenu

- approximer le nombre π
- utiliser les notions de hasard, de probabilité et de loi des grands nombres
- utiliser et reviser l'équation du cercle
- aborder la notion de limite à un niveau intuitif
- appliquer le graphe cartésien comme cadre de référence

affectifs

- approximer un nombre comme π, à la fois mystérieux et sans signification, à partir de données recueillies "dans la rue"...
- effectuer une tâche collective où l'apport de chacun permet d'améliorer la qualité du résultat final

sociaux

- effectuer une action concrète en collectant des données
- permettre de voir que les mathématiques sont près d'une certaine réalité

de processus

- recueillir des données
- représenter graphiquement des données empiriques
- établir des liens entre le réel et les outils mathématiques
- illustrer la progression d'une approximation

MATERIEL

- un générateur de nombres aléatoires compris entre 0 et 100 (soit un annuaire téléphonique, soit les plaques d'immatriculation d'automobiles, etc. Attention aux séries de nombres systématisés: les adresses dans un petit quartier, les matricules d'étudiants, etc.)
- une table de carrés des nombres de 0 à 100 (facultatif)
- un mini-calculateur (facultatif)
- un tableau noir ou un grand carton (pour la deuxième partie).

REFERENCE

VERVOORT, Gerardus, *Pie in the street or how to calculate π from the license plates in the parking lot*, in THE MATHEMATICS TEACHER, volume 68, numéro 7, novembre 1975, pages 580 à 582.

Remarque:

Dans le même ordre d'idée, un autre jeu qui permet d'approximer π provient de la célèbre formule de Buffon*.

Prenez une surface parcourue par des lignes parallèles équidistantes, par exemple un plancher en bois franc. Supposons que la distance entre les lignes est k. Laissons tomber plusieurs fois une aiguille d'une longueur $\ell \leq k$. Le rapport du nombre de fois que l'aiguille touchera une ligne du plancher sur le nombre total d'essais tend vers: $\frac{2\ell}{k\pi}$. Soit r ce rapport, alors π est approximé par $\frac{2\ell}{kr}$.

Dans le cas particulier où l'aiguille est deux fois plus petite que la distance entre les lignes, soit $\ell = \frac{k}{2}$, alors π tend vers l'inverse multiplicatif de r, soit $\frac{1}{r}$.

---

* SCHROEDER, Lee L., *Buffon's Needle Problem: An Exciting Application of Many Mathematical Concepts*, in THE MATHEMATICS TEACHER, volume 67, numéro 2, février 1974, pages 183 à 186.