CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

2 avril 1970

QUESTIONNAIRE

(Trois heures étaient allouées aux candidats)

1. a) Décomposer en facteurs $x^8 - 81$.

   b) Trouver le reste de la division du polynôme $2x^3 + 3x^2 - 4x - 2$ par $x + 2$.

2. Gédéon envoie son garçon vendre ses melons, dont la moitié seulement est de bonne qualité. Il lui dit de vendre les bons melons à 2 pour 25 cents, les autres à 3 pour 25 cents. Le fils trouve que tout ça est trop compliqué et qu'après tout il peut les vendre 10 cents chacun, puisque cela fait 5 pour 50 cents. En rentrant à la maison, après avoir vendu tous les melons, il se fait réprimander par son père qui lui fait remarquer qu'il manque un dollar. Combien de melons a-t-il vendu?

3. Trouver toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\frac{92}{105} = \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7}.$$

4. Démontrer que l'aire d'un triangle inscrit dans un parallélogramme est au plus égale à la moitié de l'aire de ce parallélogramme.

5. A l'aide des inscriptions suivantes

langue française F	*langue inconnue X*
Les chiens aiment courir	inero imbes noceber
Le policier marche lentement	imbeca rinecem lamir
La secrétaire travaille	miami numer
Les lentes assises commencent	palaru rinec munor
Le petit chien aime marcher rapidement	inera sovin lamurem imbes lamirer
Les policiers commencent à courir	imbeco munor noceber
Les assises marchent rapidement	palaru lamurem lamir
Les secrétaires rapides aiment travailler	miamu lamur imbes numer

traduire dans la langue X la phrase suivante:

Le rapide policier commence à aimer les secrétaires.

6. Un intrépide Québécois décide d'atteindre (d'atteindre seulement!) le pôle nord en moto-neige. Il doit parcourir une distance de 1500 milles en franchissant 300 milles par jour. Malheureusement, il ne peut apporter de l'essence que pour 3 jours. Sachant qu'il ne peut se faire de réserve d'essence qu'à tous les 300 milles, trouver en combien de jours il atteindra le pôle nord.

7. Un escalier mobile, dont on voit à chaque instant n marches, roule à une vitesse constante. Pierre et André descendent d'un pas régulier l'escalier en marche. Pendant que Pierre descend d'une marche, André descend de deux. Pierre atteint le bas de l'escalier après avoir franchi 18 marches, André après en avoir parcouru 27. Déterminer n.

8. Soit AC la plus grande des diagonales d'un parallélogramme ABCD. De C on mène deux perpendiculaires, l'une à AB, l'autre à AD. Si E et F sont les pieds de ces perpendiculaires, démontrer que $\overline{AB}.\overline{AE} + \overline{AD}.\overline{AF} = \overline{AC}^2$.

SOLUTIONS

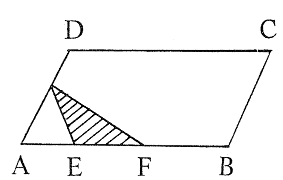
PROBLÈME 1. (a) $(x^4 + 9)\ (x^2 + 3)\ (x^2 - 3)\ (x + \sqrt{3})\ (x - \sqrt{3})$.
(b) $f(-2) = 2$.

PROBLÈME 2. Soit x le nombre de melons vendus par Gédéon. Alors
$(\frac{1}{2}x) + (25/2) + (\frac{1}{2}x)\ (25/3) = 10x + 100$, d'où $x = 240$.

PROBLÈME 3. L'équation donnée est équivalente à $35x + 21y + 15z = 92$. Les valeurs de x, y et z sont entières et positives. On vérifie que $x>1$ est impossible, sinon on aurait $35x + 21y + 15z>92$. Donc $x = 1$. De plus, $y = 2$, puisque le nombre $35x + 15z$, un multiple de 5, se termine par un 0 ou un 5. Par suite $z = 1$. Il n'y a donc qu'une seule solution.

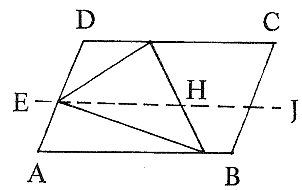
PROBLÈME 4. Deux cas sont possibles.

Premier cas; deux sommets du triangle sont sur un même côté du parallélogramme. Sans perte de généralité, on peut supposer la situation suivante:



Pour un côté EF fixe sur AB, l'aire du triangle est maxima lorsque la hauteur relative à EF est de longueur maxima, donc lorsque G se trouve sur DC. Par ailleurs, avec G situé sur DC, l'aire maxima du triangle s'obtient lorsque EF coïncide avec AB et vaut la moitié de l'aire du parallélogramme — quelle que soit la position de G sur DC.

Second cas: les sommets sont situés sur trois côtés différents du parallélogramme. Sans perte de généralité, on peut supposer la situation suivante:



Par E, menons une parallèle à AB et à DC. Elle rencontre GF et CB respectivement en H et J. Le premier cas s'applique alors séparément aux triangles EHF et EHG inscrits respectivement dans les parallélogrammes EABJ et EJCD. La conclusion suit.

PROBLÈME 5. Le rapide policier commence à aimer les secrétaires:

imbeca lamur munor imbeser miamu.

Des variantes de cette traduction sont également acceptables: (i) on peut ajouter une terminaison quelconque à "lamur"; (ii) on peut écrire "imbes" au lieu de "imbeser"; (iii) "miamu" peut être placé n'importe où dans la phrase.

PROBLÈME 6. Etapes de 300 milles chacune: point de départ $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4 \rightarrow$ pôle nord.

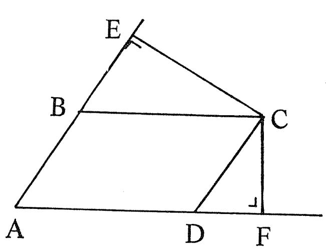
Pour se rendre au pôle, le véhicule doit avoir pour trois jours d'essence au moment où il est en E_2. Pour cela il doit avoir de l'essence pour 6 jours en E_1. En effet, il fait le plein en E_1, va porter de l'essence pour un jour en E_2, revient, fait le plein, repart pour E_2; avec l'essence apportée en E_2 au voyage précédent, il a maintenant de l'essence pour trois jours à partir de E_2.

Pour avoir de l'essence pour six jours en E_1, il doit en acheter pour 15 jours au point de départ et prendre neuf jours pour les transporter en E_1. Le trajet total prend donc 15 jours.

PROBLÈME 7. Soient V la vitesse de l'escalier, V_p celle de Pierre par rapport à celle de l'escalier et V_a la vitesse d'André par rapport à celle de l'escalier. On sait que $V_a = 2\ V_p$.

Pendant que l'escalier descend de n-18 marches, Pierre en descend 18, de sorte que $18/V_p = (n\text{-}18)/V$. De même, $27/2V_p = 27/V_a = (n\text{-}27)/V$. On déduit que $n = 54$.

PROBLÈME 8.



$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{AF}^2 + (\overline{CD}^2 - \overline{DF}^2) = \overline{AF}^2 + \overline{CD}^2 - (\overline{AF} - \overline{AD})^2$
$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2 + 2\,\overline{AD}\,.\,\overline{AF}.$

De même, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB}\,.\,\overline{AE}$
Puisque $\overline{CD} = \overline{AB}$ et que $\overline{AD} = \overline{BC}$, on déduit: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{AE} + \overline{AD}\,.\,\overline{AF}.$